PAU · COMUNIDAD VALENCIANA

MATEMÁTICAS CC.SS

PROBLEMA 2A

JULIO 2026–solapamiento

Análisis de funciones



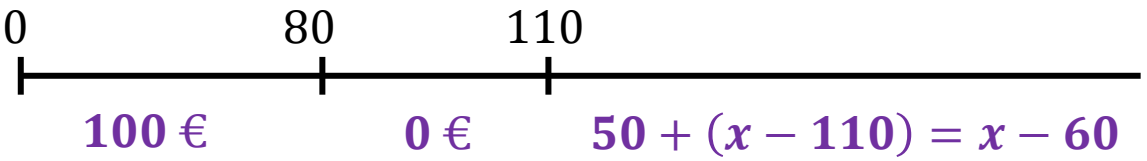
www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

Problema 2. A. En una carretera se sanciona a los vehículos con velocidad superior a 110 km/h o inferior a 80 km/h. Si el radar detecta un vehículo con velocidad inferior a 80 km/h, el conductor debe pagar 100 euros, sea cual sea su velocidad; si la velocidad detectada es superior a 110 km/h, el conductor debe pagar 50 euros más la diferencia entre la velocidad detectada por el radar y 110 km/h, en euros; si la velocidad detectada está entre 80 y 110 km/h, ambos incluidos, no debe pagar nada.

a) Obtén la función que indique los euros que debe pagar un conductor si el radar detecta que su coche circula a x km/h, para cualquier $x \geq 0$, y analiza en qué puntos esta función es continua y en qué puntos es discontinua. *(1,25 puntos)*

Se observa que hay tres tramos en función de la velocidad



Expresamos la función a trozos con una sola expresión.

$$f(x) = \begin{cases} 100; & 0 \leq x < 80 \\ 0; & 80 \leq x \leq 110 \\ x - 60; & x > 110 \end{cases}$$

www.angel

©Angel Cuesta Arza

Problema 2A

a) Obtén la función que indique los euros que debe pagar un conductor si el radar detecta que su coche circula a x km/h, para cualquier $x \geq 0$, y analiza en qué puntos esta función es continua y en qué puntos es discontinua. *(1,25 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{100}; & \mathbf{0 \leq x < 80} \\ \mathbf{0}; & \mathbf{80 \leq x \leq 110} \\ \mathbf{x - 60}; & \mathbf{x > 110} \end{cases}$$

Como cada tramo es continuo, solo es necesario estudiar los puntos de unión $x = 80$ y $x = 110$. Comenzamos estudiando la continuidad en $x = 80$.

$f(80) = 0$

$\lim_{x \to 80^-} f(x) = \lim_{x \to 80^-} 100 = 100$

$\lim_{x \to 80^+} f(x) = \lim_{x \to 80^+} 0 = 0$

$\longrightarrow \lim_{x \to 80^-} f(x) \neq \lim_{x \to 80^+} f(x)$

$f(x)$ no es continua en $x = 80$, presenta una discontinuidad inevitable de salto finito.

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

Problema 2A

a) Obtén la función que indique los euros que debe pagar un conductor si el radar detecta que su coche circula a x km/h, para cualquier $x \geq 0$, y analiza en qué puntos esta función es continua y en qué puntos es discontinua. *(1,25 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} 100; & 0 \leq x < 80 \\ 0; & 80 \leq x \leq 110 \\ x - 60; & x > 110 \end{cases}$$

Se estudia la continuidad de la función en $x = 110$.

$f(110) = 0$

$$\lim_{x \to 110^-} f(x) = \lim_{x \to 110^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 110^+} f(x) = \lim_{x \to 110^+} x - 60 = 50$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 110^-} f(x) \neq \lim_{x \to 110^+} f(x)$$

$f(x)$ no es continua en $x = 110$, presenta una discontinuidad inevitable de salto finito.

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

Problema 2A

b) Calcula el área de la región delimitada por esta función, el eje OX, la recta de ecuación $x = 120$ y la recta de ecuación $x = 125$. *(1 punto)*

$$f(x) = \begin{cases} 100; & 0 \leq x < 80 \\ 0; & 80 \leq x \leq 110 \\ x - 60; & x > 110 \end{cases}$$

En el intervalo [120,125] se aplica el tercer tramo, $f_3(x) = x - 60$, que es positivo. Por ello, el área se obtiene mediante la integral definida de $f_3(x)$ entre 120 y 125.

Se sustituye el tercer tramo, se calcula una primitiva y se aplica la regla de Barrow.

$$\int_{120}^{125} f(x)\ dx = \int_{120}^{125} (x - 60)\ dx = \left[\frac{x^2}{2} - 60 \cdot x\right]_{120}^{125} = \left(\frac{125^2}{2} - 60 \cdot 125\right) - \left(\frac{120^2}{2} - 60 \cdot 120\right) = \frac{625}{2} = 312{,}5$$

El área delimitada por la función, el eje OX y las rectas $x = 120$ y $x = 125$ es $\mathbf{312{,}5\ unidades\ de\ área}$.

NOTA: En todo el intervalo [120,125] se utiliza **el tercer tramo de la función, porque $x > 110$**.

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

c) En otra carretera solo se sanciona a los vehículos con velocidad superior a 120 km/h. Si la velocidad detectada por el radar no es superior a 120 km/h, el conductor no debe pagar nada; en caso contrario, debe pagar el triple de la diferencia entre la velocidad detectada por el radar y 120 km/h, en euros. ¿A qué velocidades un conductor tendrá que pagar lo mismo en esta carretera que en la anterior?

(1,25 puntos)

En la carretera anterior habíamos visto que: $f(x) = \begin{cases} 100; & 0 \leq x < 80 \\ 0; & 80 \leq x \leq 110 \\ x - 60; & x > 110 \end{cases}$

En la nueva carretera hay solo dos tramos:



Expresamos la función a trozos con una sola expresión. $g(x) = \begin{cases} 0; & 0 \leq x \leq 120 \\ 3x - 360; & x > 120 \end{cases}$

Para velocidades entre 80 y 110 km/h ambas sanciones son 0 €. Para velocidades superiores a 120 km/h, igualamos las expresiones que calculan ambas sanciones.

$x - 60 = 3x - 360 \longrightarrow 2x = 300 \longrightarrow x = 150$

El conductor pagará lo mismo en ambas carreteras si circula entre **80 y 110 km/h**, ambos incluidos, ya que en las dos carreteras la multa es cero; además, también pagará lo mismo si circula exactamente a 150 km/h, pagando en ese caso 90 €.

www.angelcuesta.com