PAU · COMUNIDAD VALENCIANA

MATEMÁTICAS CC.SS

PROBLEMA 2B

JULIO 2026–solapamiento

Análisis de funciones



www.angelcuesta.com

©Ángel Cuesta Arza

Problema 2B

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + x^2}$$

Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen, y el valor de estos. *(2 puntos)*

d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(0,5 puntos)*

www.angel

©Angel Cuesta Arza

Problema 2B

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. $f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + x^2}$

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $1 + x^2 = 0 \longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

Por ello, el Dominio es: $\boldsymbol{Dom\, f(x) = R}$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ Y(x = 0) \rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 0}{1 + 0^2} = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow \boldsymbol{A = (0, 0)}$$

$$Eje\ X\ (y = 0) \rightarrow \frac{x^2 - x}{1 + x^2} = 0 \rightarrow x^2 - x = 0 \longrightarrow x \cdot (x - 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 & \boldsymbol{A = (0, 0)} \\ x = 1 & \boldsymbol{B = (1, 0)} \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes son: $\boldsymbol{A = (0, 0); B = (1, 0)}$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

Problema 2B

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

Dado que la función está definida en el conjunto de los números reales, no existe asíntota vertical para $f(x)$.

La **asíntota horizontal** se calcula estudiando el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x}{1+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\boldsymbol{y = 1 \text{ es asíntota horizontal de } f(x)}$$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen, y el valor de estos.

$$f(x)=\frac{x^2-x}{1+x^2}$$

Se calcula la derivada.

$$f'(x)=\frac{(2x-1)\cdot(1+x^2)-(x^2-x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2x+2x^3-1-x^2-2x^3+2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(1+x^2)^2}$$

Igualo la derivada a cero: $\frac{x^2+2x-1}{(1+x^2)^2}=0 \longrightarrow x^2+2x-1=0 \longrightarrow \begin{cases} x=-1+\sqrt{2}\approx 0{,}414 \\ x=-1-\sqrt{2}\approx -2{,}414 \end{cases}$

Se estudia el signo de la derivada.

	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

$f(x)$ ***decrece*** en $\left(-1-\sqrt{2}\,,-1+\sqrt{2}\right)$

$f(x)$ ***crece*** en $\left(-\infty\,,-1-\sqrt{2}\right)\cup\left(-1+\sqrt{2},+\infty\right)$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen, y el valor de estos.

$$f(x)=\frac{x^2-x}{1+x^2}$$

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Se observa en el cuadro que la función tiene un máximo relativo en $\boldsymbol{x=-1-\sqrt{2}}$ y un mínimo relativo en $\boldsymbol{x=-1+\sqrt{2}}$. Se obtienen las imágenes correspondientes.

$$f\left(-1-\sqrt{2}\right)=\frac{\left(-1-\sqrt{2}\right)^2-\left(-1-\sqrt{2}\right)}{1+\left(-1-\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\approx 1{,}207$$

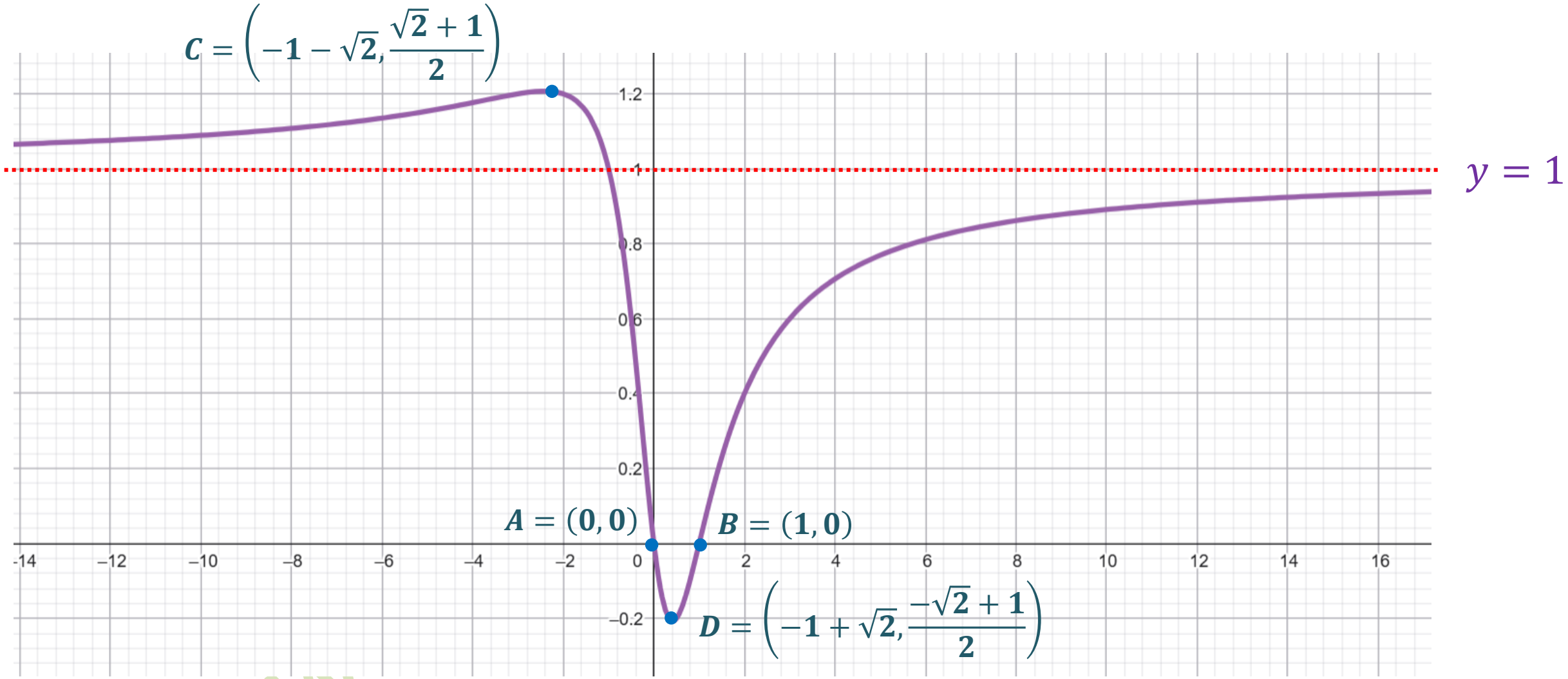
Máximo relativo: $\boldsymbol{C=\left(-1-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)}$

$$f\left(-1+\sqrt{2}\right)=\frac{\left(-1+\sqrt{2}\right)^2-\left(-1+\sqrt{2}\right)}{1+\left(-1+\sqrt{2}\right)^2}=\frac{-\sqrt{2}+1}{2}\approx -0{,}207$$

Mínimo relativo: $\boldsymbol{D=\left(-1+\sqrt{2},\frac{-\sqrt{2}+1}{2}\right)}$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza



©Angel Cuesta Arza