El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas Aplicadas a las CCSS

Opción B, Problema 1

Junio 2019

Matrices y determinantes

El enunciado

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcula $(AB)^{-1}$.

b) Calcula $AB^t - A^tB$.

c) Resolver la ecuación $B^tX + A^tB = A^t$

Siendo A^t y B^t las matrices traspuestas de A y de B.

Cálculo de la matriz inversa

En primer lugar se calcula el producto de A y B. Y a continuación se hará la matriz inversa de la matriz resultante.

$$A * B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz inversa, utilizaremos el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|AB| = \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 8 = 4 \neq 0 \rightarrow La\ matriz\ tiene\ inversa$

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(AB) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $\left(Adj(AB)\right)^t = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}(Adj(AB))^t = \frac{1}{4} * \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

Solución: $\boldsymbol{(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}}$

Operando matrices

Se realiza la operación, transponiendo previamente las matrices correspondientes.

$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$AB^t - A^tB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Quedando:

$\boldsymbol{AB^t - A^tB = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}}$

Ecuación Matricial

Se despeja X en primer lugar, aplicando las propiedades de las matrices.

$B^tX + A^tB = A^t \;\; \rightarrow \;\; B^tX = A^t - A^tB \;\; \rightarrow \;\; (\boldsymbol{B^t})^{-\mathbf{1}}(B^tX) = (\boldsymbol{B^t})^{-\mathbf{1}}(A^t - A^tB)$

Quedando:

$X = (\boldsymbol{B^t})^{-\mathbf{1}}(A^t - A^tB)$

Para poder calcular X, se debe calcular la inversa de $\boldsymbol{B^t}$, siendo $B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Para calcular la matriz inversa, utilizaremos el método de los adjuntos.

1) Determinante: $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0 \rightarrow La\ matriz\ tiene\ inversa$

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(B^t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $\left(Adj(B^t)\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

4) Matriz Inversa: $(B^t)^{-1} = \frac{1}{|B^t|} * Adj(B^t) = \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Se calcula ahora $A^t - A^tB$

$$A^t - A^tB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ecuación Matricial

Se calcula X utilizando los datos anteriormente obtenidos.

$(B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^t - A^tB = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$$X = (\boldsymbol{B^t})^{\boldsymbol{-1}}(A^t - A^tB) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -17/2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución: $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-17/2} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$