El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas Aplicadas a las CCSS

Opción B, Problema 2

Junio 2019

Problema de optimización

El enunciado

En los primeros 6 años, una empresa obtuvo unos beneficios (en decenas de miles de euros) que pueden representarse mediante la función $f(t)=t^3-8t^2+15t$, donde t es el tiempo en años transcurridos.

a) Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas.

b) ¿En qué valor de t se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este?

c) ¿En qué valor de t se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta?

d) Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta.

Signo de una función

Dada la función: $f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t \quad ; \quad 0 \leq t \leq 6$ ¡OJO!, fíjate en el dominio

La empresa tendrá beneficios cuando f(t)>0, y pérdidas cuando f(t)<0.

Se iguala a cero la función para ver donde están los ceros.

$$t^3 - 8t^2 + 15t = 0 \rightarrow t(t^2 - 8t + 15) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 8t + 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 5 \end{cases} \end{cases}$$

Con los valores obtenidos que pertenecen al dominio (que son todos), se hace un estudio de signos de la función.

Para ello se sustituyen un valor de cada intervalo en f(t):

$f(1) = 1^3 - 8 * 1^2 + 15 * 1 = 8 > \mathbf{0}$

$f(4) = 4^3 - 8 * 4^2 + 15 * 4 = -4 < \mathbf{0}$

$f(5'5) = 5'5^3 - 8 * 5'5^2 + 15 * 5'5 = 6'875 > \mathbf{0}$

Teniendo en cuenta que la función f(t) está definida en [0,6], la empresa tuvo beneficios en los periodos **(0,3) ∪ (5,6]** y tuvo perdidas en **(3,5)**.

Cálculo de máximos y mínimos

Para el estudio de la monotonía se necesita calcular la derivada. $\boldsymbol{f'(t) = 3t^2 - 16t + 15}$

Se iguala a cero para hacer el estudio de signos. $3t^2 - 16t + 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{8+\sqrt{19}}{3} \cong 4'1196 \\ t_2 = \frac{8-\sqrt{19}}{3} \cong 1'2137 \end{cases}$

	0 — $\frac{8-\sqrt{19}}{3}$	$\frac{8-\sqrt{19}}{3}$ — $\frac{8+\sqrt{19}}{3}$	$\frac{8+\sqrt{19}}{3}$ — 6
f'(t)	+	—	+
f(t)	↗	↘	↗

Se debe calcular el valor de f(t) en las dos raíces t_1 y t_2 y en los valores extremos del dominio t=0 y t=6.

$f\left(\frac{8+\sqrt{19}}{3}\right) \cong -4'0607$ *que sería el mínimo relativo de* $f(t)$ *y* $f(0) = 0$ *que no es mínimo absoluto.*

$f\left(\frac{8-\sqrt{19}}{3}\right) \cong 8'2088$ *que sería el máximo relativo de* $f(t)$ *y* $f(6) = 18$ *que sería máximo absoluto.*

Solución: El **máximo** beneficio se alcanza a los **6 años y es de 180000 euros** y la **máxima pérdida** se produjo al cabo de **4´1196 años y esta pérdida fue de 40607 euros.**

Evolución futura de los beneficios de la empresa

La función será creciente para t>6 ya que f'(6)>0.

Por otro lado, f(6)>0, por lo que en el sexto año tendrá beneficios que aumentarán año tras año al ser la función beneficios creciente hasta el infinito y más allá.

Por ello, a partir del quinto año, la empresa siempre tendrá beneficios.