El problema del día

Selectividad C. Valenciana
Matemáticas Aplicadas a las CCSS
Opción A, Problema 2
Junio 2019

Análisis de una función y representación gráfica.

El Enunciado

2) Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Dominio y puntos de corte con los ejes

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$2 - x = 0 \rightarrow x = 2$ lo cual implica que el Dominio es**:** $\boldsymbol{Dom\ f(x) = R - \{2\}}$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ Y(x = 0) \rightarrow f(0) = \frac{0^2}{2 - 0} = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow \boldsymbol{A = (0, 0)}$$

$$Eje\ X\ (y = 0) \rightarrow \frac{x^2}{2 - x} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \boldsymbol{B = (0, 0)}$$

Por ello solo hay un punto de corte con los ejes: $\mathbf{A = (0, 0)}$

Asíntotas

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

En x=2;

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{2-x}=\frac{4}{0}\to\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2}{2-x}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2}{2-x}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty\end{cases}, luego\ \boldsymbol{x=2}\ es\ A.V.de\ f(x)$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar mas fácilmente la función en el último apartado.

La asíntota horizontal se calcula con el límite en infinito.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{2-x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to +\infty}-x=-\infty \qquad luego\ \boldsymbol{no\ hay}\ A.H\ en\ f(x)$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{2-x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to -\infty}-x=+\infty$$

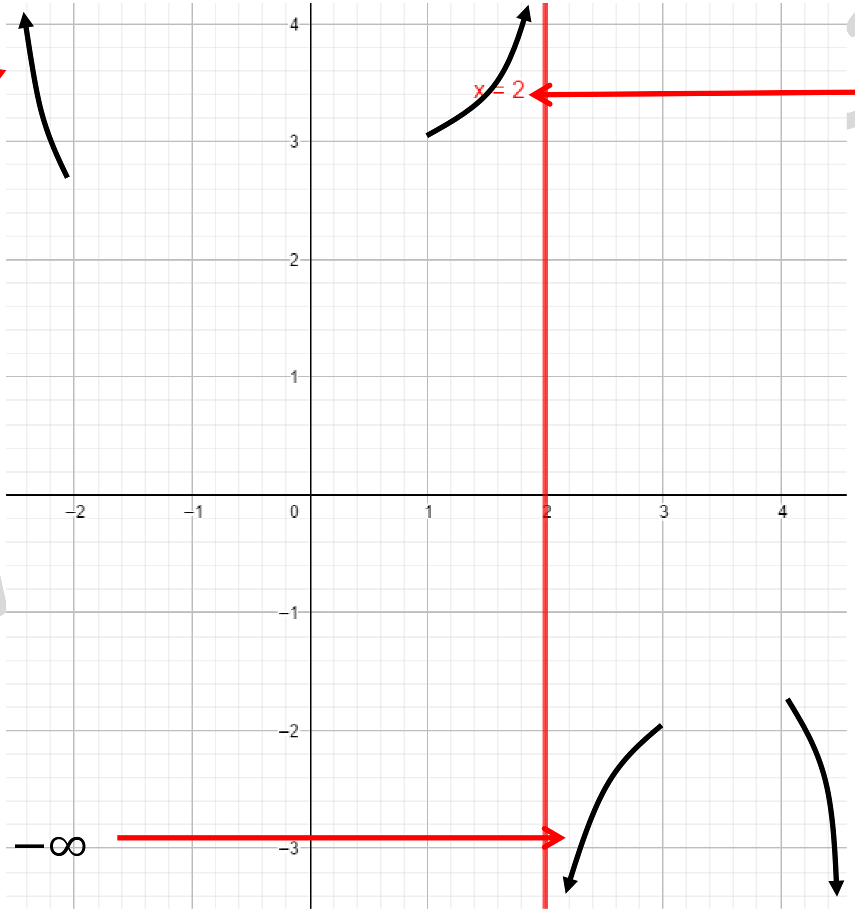
Aunque hay una asíntota oblicua, como no piden que la calculemos no lo haremos.

Representación de la asíntota vertical y de las ramas infinitas

Si representamos la asíntota vertical y las ramas infinitas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{2-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2}{2-x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$



$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2}{2-x} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2-x} = -\infty$$

Estudio de la monotonía

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{2x * (2-x) - x^2 * (-1)}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$f'(x) = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} = 0 \rightarrow 4x - x^2 = 0 \rightarrow x(4-x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Se estudia el signo de la derivada: Para ello damos valores a la derivada en los 3 intervalos que definen el dominio y la derivada.

	(-∞,0)	0	(0,2)	2	(2,4)	4	(4,+∞)
f(x)	↘	**0**	↗	∄	↗	**-8**	↘
f'(x)	**-**	**0**	**+**	∄	**+**	**0**	**-**

Se observa que f(x) es decreciente en $\boldsymbol{x} \in (-\infty, \mathbf{0}) \cup (\mathbf{4}, +\infty)$.

Y creciente en $\boldsymbol{x} \in (\mathbf{0}, \mathbf{2}) \cup (\mathbf{2}, \mathbf{4})$.

Por otro lado también comprobamos que la función presenta:

Máximo relativo en **(4,-8)** y mínimo relativo en **(0,0)**.

Representación Gráfica

Utilizando todos los datos obtenidos en los apartados anteriores, puntos de corte y asíntotas, podemos esbozar la gráfica.