Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS
Junio 2021

Problema 3
Análisis de una función

El Enunciado

Dada la función $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si las hubiera.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Solución:

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$ lo cual implica que el Dominio es: $\boxed{\boldsymbol{Dom\, f(x) = R - \{-2, 2\}}}$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ Y (x = 0) \rightarrow f(0) = \frac{1-0^2}{0^2-4} = \frac{1}{-4} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = \left(0, -\frac{1}{4}\right)}}$$

$$Eje\ X\ (y = 0) \rightarrow \frac{1-x^2}{x^2-1} = 0 \rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \quad \boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{B = (1, 0)} \\ \boldsymbol{C = (-1, 0)} \end{array}}$$

Asíntotas

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

En x=−2; $\lim\limits_{x \to -2} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-3}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-3}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^-} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \end{cases}, luego \ \boxed{\boldsymbol{x = -2\ es\ A.V.\ de\ f(x)}}$

En x=2; $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-3}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-3}{0^-} = +\infty \end{cases}, luego \ \boxed{\boldsymbol{x = 2\ es\ A.V.\ de\ f(x)}}$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar mas fácilmente la función en el último apartado.

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite en infinito.

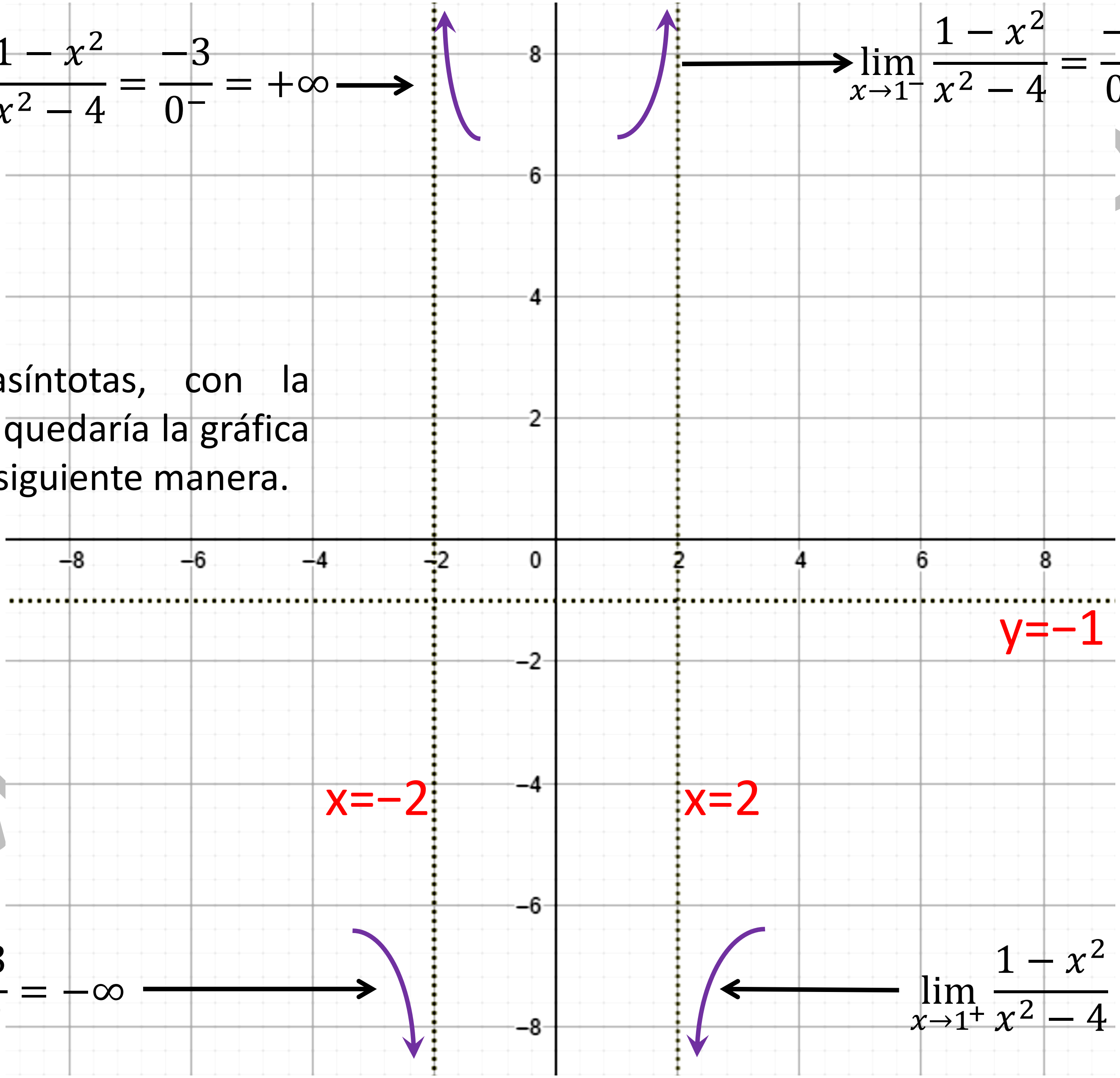
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1, luego \ \boxed{\boldsymbol{y = -1\ es\ A.H.\ de\ f(x)}}$$

Esbozo Asíntotas

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{1 - x^2}{x^2 - 4} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1 - x^2}{x^2 - 4} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.



$$\lim_{x \to -2^-} \frac{1 - x^2}{x^2 - 4} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1 - x^2}{x^2 - 4} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

Estudio de la monotonía

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$$

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{-2x\cdot(x^2-4)-(1-x^2)\cdot(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{6x}{(x^2-4)^2}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$\frac{6x}{(x^2-4)^2} = 0 \longrightarrow 6x = 0 \longrightarrow x = 0$$

Se estudia el signo de la derivada:

$-\infty$ $\quad$ -2 $\quad$ 0 $\quad$ 2 $\quad$ $+\infty$

f'(x)	$-$	$-$	$+$	$+$
f(x)	↘	↘	↗	↗

f(x) es **decreciente** en $x\epsilon(-\infty,-2\,)\cup(-2{,}0)$ y **creciente** en $x\epsilon(0{,}2)\ \cup\ (2,+\infty)$.

Máximos y mínimos

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$ — -2	-2 — 0	0 — 2	2 — $+\infty$
f'(x)	$-$	$-$	$+$	$+$
f(x)	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Se observa en el cuadro que la función tiene un mínimo relativo en x=0.

Mínimo: $\left(0, f(0)\right) = \left(0, -\frac{1}{4}\right) = (\mathbf{0}, \mathbf{-0'25})$

Representación Gráfica