Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS

Junio 2021

Problema 4

Optimización de una función cuadrática

El enunciado

Desde el inicio de 1980, la capacidad (cantidad de gas que puede extraerse) de una explotación gasística, expresada en miles de metros cúbicos, viene dada por la función

$$f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2$$

donde la variable x representa el tiempo en años transcurridos desde el inicio de 1980.

a) Calcula la capacidad de la explotación en 1980.

b) Calcula cuanto tiempo ha de pasar desde el inicio de 1980 para que la capacidad alcance su valor máximo, y cuál es dicho valor máximo (en miles de metros cúbicos).

c) Si el beneficio en euros por metro cúbico de gas disminuye con los años según la función

$$g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100}$$

Calcula cuánto tiempo debe pasar para que la explotación deje de ser rentable y cuál será la capacidad (en miles de metros cúbicos) de la explotación en ese momento.

Solución:

La capacidad de la explotación en 1980 se obtiene sustituyendo x por 0 en la función dada.

$$f(0) = 36600 + 1500 \cdot 0 - 15 \cdot 0^2 = 36600$$

La capacidad de la explotación en 1980 será 36600 miles de m^3 de gas.

Resolución

b) Calcula cuanto tiempo ha de pasar desde el inicio de 1980 para que la capacidad alcance su valor máximo, y cuál es dicho valor máximo (en miles de metros cúbicos).

Puesto que la función es cuadrática y el coeficiente del término cuadrático es negativo, sabemos que el máximo está en el vértice.

$f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2$ Siendo: a=−15; b=1500; c=36600

$$v_x = \frac{-b}{2a} \longrightarrow v_x = \frac{-1500}{2\cdot(-15)} = 50$$

Deben pasar 50 años para alcanzar el máximo de la producción.

Para calcular la capacidad máxima, se sustituye en la función x=50.

$$f(50) = 36600 + 1500\cdot 50 - 15\cdot 50^2 = 74100$$

Ese año se extraerán 74100 miles de m^3 de gas.

También se podría haber resuelto el ejercicio con ayuda de las derivadas.

$$f'(x) = -30x + 1500 \longrightarrow -30x + 1500 = 0 \longrightarrow x = 50$$

Se calcula ahora la segunda derivada. Se sustituye en x=50

$$f''(x) = -30 \longrightarrow f''(50) = -30 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa, eso significa que en x=50 hay un máximo relativo, tal como habíamos calculado anteriormente.

Resolución

c) Si el beneficio en euros por metro cúbico de gas disminuye con los años según la función

$$g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100}$$

Calcula cuánto tiempo debe pasar para que la explotación deje de ser rentable y cuál será la capacidad (en miles de metros cúbicos) de la explotación en ese momento.

Para que la explotación deje de ser rentable, $g(x) < 0 \longrightarrow 3 - \frac{3x^2}{12100} < 0$

Se calculan los ceros de la función. $3 - \frac{3x^2}{12100} = 0 \longrightarrow 3 = \frac{3x^2}{12100} \longrightarrow 12100 = x^2 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 110 \\ \cancel{x_2 = -110} \end{cases}$

Se estudia el signo de la función:

x	0	110	$+\infty$
g(x)	$+$		$-$

$g(1) = 3 - \frac{3 \cdot 1^2}{12100} > 0 \quad g(200) = 3 - \frac{3 \cdot 200^2}{12100} < 0$

Es decir, la función g(x) es positiva cuando x está comprendida entre 0 y 110.

Para calcular la capacidad, se sustituye 110 en f(x).

Deberán pasar 110 años para que la explotación deje de ser rentable.

$f(110) = 36600 + 1500 \cdot 110 - 15 \cdot 110^2 = 20100$

La capacidad del depósito sería 20100 miles de m³.