Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS
Junio 2022

Problema 3
Análisis de una función

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Dominio de una función racional.
2) Cálculo de asíntotas de una función racional.
3) Estudio de la monotonía de una función.

Herramientas utilizadas:

1) Límites.
2) Derivadas.

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

PAU Julio 2021

PAU Junio 2021

PAU Septiembre 2020

PAU Julio 2020

PAU Julio 2019

PAU Junio 2019

Problema 3

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución:

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$(x+1)^2 = 0 \longrightarrow x + 1 = 0 \longrightarrow x = -1$ lo cual implica que el Dominio es: $\boxed{\boldsymbol{Dom\ f(x) = R - \{-1\}}}$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ Y (x = 0) \rightarrow f(0) = \frac{0^2 + 0 - 2}{(0+1)^2} = \frac{-2}{1} = -2 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = (0, -2)}}$$

$$Eje\ X\ (y = 0) \rightarrow \frac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases} \quad \boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{B = (1, 0)} \\ \boldsymbol{C = (-2, 0)} \end{array}}$$

Problema 3

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

En x=−1; $\lim_{x\to --1} \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} = \frac{-2}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{cases}, luego\ \boxed{\boldsymbol{x = -1\ es\ A.V.de\ f(x)}}$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar mas fácilmente la función en el último apartado.

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

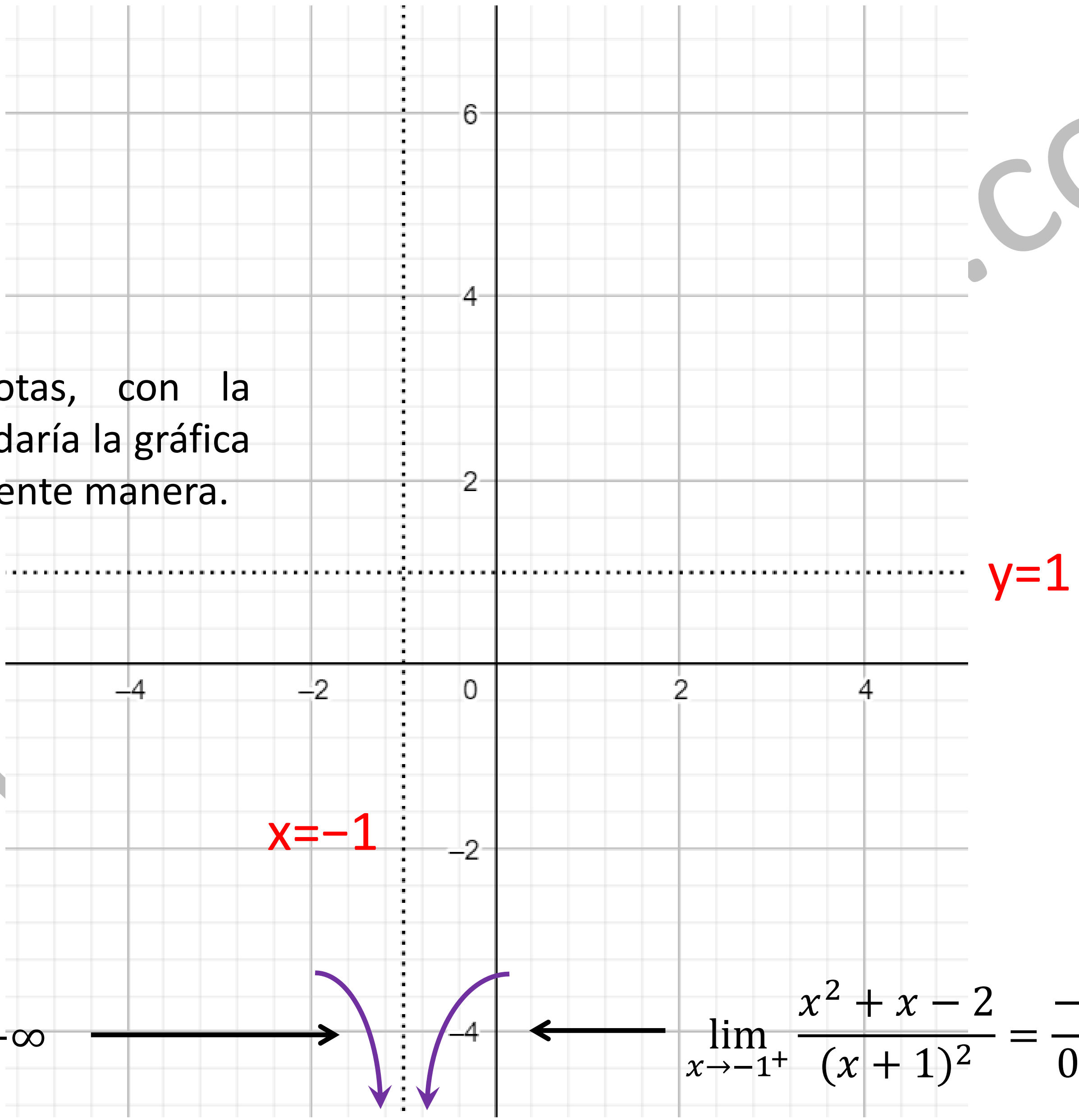
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$\boxed{por\ lo\ tanto, \boldsymbol{y = 1\ es\ A.H.de\ f(x)}}$

Problema 3

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.



$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Problema 3

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}$$

Se calcula la derivada.

$$f'(x)=\frac{(2x+1)\cdot(x+1)^2-(x^2+x-2)\cdot 2\cdot(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)\cdot[(2x+1)\cdot(x+1)-(x^2+x-2)\cdot 2)]}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)\cdot(x+1)-(x^2+x-2)\cdot 2)}{(x+1)^3}=\frac{2x^2+2x+x+1-2x^2-2x+4}{(x+1)^3}=\frac{x+5}{(x+1)^3}$$

Igualamos la derivada a cero: $\frac{x+5}{(x+1)^3}=0 \longrightarrow x+5=0 \longrightarrow x=-5$

Se estudia el signo de la derivada:

	$-\infty$ — -5	-5 — -1	-1 — $+\infty$
f'(x)	+	−	+
f(x)	↗	↘	↗

f(x) es **decreciente** en $x\epsilon(-5,-1)$ y **creciente** en $x\epsilon(-\infty,-5)\ \cup\ (-1,+\infty)$.

Problema 3

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -1)$	$(-1, +\infty)$
f'(x)	$+$	$-$	$+$
f(x)	↗	↘	↗

Se observa en el cuadro que la función tiene un máximo relativo en x=−5.

Se sustituye ese valor en la función para obtener la coordenada y del máximo relativo.

$$f(-5) = \frac{(-5)^2+(-5)-2}{((-5)+1)^2} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

Las coordenadas del máximo relativo son: $\boxed{\left(\mathbf{-5}, \mathbf{\frac{9}{8}}\right)}$

Problema 3