Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS
Junio 2022

Problema 4
Optimización de una función cuadrática

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Función cuadrática.

Herramientas utilizadas:

1) Ecuaciones e inecuaciones
2) Derivadas

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

ÁNGEL CUESTA
Tu profesor en la red
SUSCRÍBETE

PAU Julio 2021

PAU Junio 2021

PAU Septiembre 2020

PAU Julio 2020

Problema 4

En una empresa se ha comprobado que sus beneficios están relacionados con su inversión en publicidad, según la función $B(x) = 50000 + 40x - (x/10)^2$, donde x es la inversión en publicidad $(x \geq 0)$ y $B(x)$ es el beneficio obtenido, ambos en euros.

a) Calcula la cantidad invertida en publicidad que produce un beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

Solución:

Puesto que la función es cuadrática y el coeficiente del término cuadrático es negativo, sabemos que el máximo está en el vértice. Resolveré este primer apartado de dos formas diferentes. Vamos con la primera.

$B(x) = 50000 + 40x - (x/10)^2$ Siendo: a=−1/100; b=40; c=50000

$$v_x = \frac{-b}{2a} \longrightarrow v_x = \frac{-40}{2 \cdot (-1/100)} = 2000$$

Debe invertir 2000 euros en publicidad para obtener el beneficio máximo.

Para calcular el máximo beneficio, se sustituye en la función x=2000.

$$B(2000) = 50000 + 40 \cdot 2000 - \left(\frac{2000}{10}\right)^2 = 90000$$

El beneficio máximo será de 90000 euros.

Problema 4

También se podría haber resuelto el ejercicio con ayuda de las derivadas (recomendable en PAU).

$$B'(x) = 40 - \frac{2x}{100} = 40 - \frac{x}{50}$$

Se iguala a cero para obtener el óptimo local. $40 - \frac{x}{50} = 0 \longrightarrow \frac{2000 - x}{50} = 0 \longrightarrow x = 2000$

Para comprobar que, en x=2000, B(x) presenta un máximo relativo, aplicaré el criterio de la segunda derivada.

Se calcula ahora la segunda derivada. $B''(x) = -\frac{2}{100}$

Se sustituye en x=2000 $B''(2000) = -\frac{2}{100} < 0$

Como la segunda derivada es negativa, eso significa que en x=2000 hay un máximo relativo, tal como habíamos calculado anteriormente. El valor del máximo beneficio ya se ha calculado anteriormente.

Debe invertir 2000 euros en publicidad para obtener el beneficio máximo.

El beneficio máximo será de 90000 euros.

Problema 4

b) Calcula los intervalos para la inversión en publicidad en los que los beneficios crecen o decrecen a medida que se invierte en publicidad.

Sabiendo que hay un máximo en x=2000, podemos afirmar que la función es creciente desde 0 a 2000 y decreciente de 2000 en adelante. Pero, con fines pedagógicos y porque lo piden en la PAU, se hará un estudio de signos de la derivada para estudiar la monotonía de la función beneficio.

Se comprueba el signo de la derivada para un valor menor que 2000 y para otro mayor que 2000.

$$B'(1000) = 40 - \frac{1000}{50} = 20 > 0 \longrightarrow B(x)\ es\ creciente\ si\ 0 \leq x < 2000$$

$$B'(3000) = 40 - \frac{3000}{50} = -60 < 0 \longrightarrow B(x)\ es\ decreciente\ si\ x > 2000$$

$B(x)$ es **creciente** si $x\epsilon[0,2000)$ y **decreciente** si $x\epsilon(2000, +\infty)$.

Problema 4

c) ¿Existe un valor para la inversión en publicidad a partir del cual los beneficios obtenidos serían menores que si no se invirtiera nada en publicidad? En caso afirmativo, determínalo.

Se calcula el beneficio cuando no se invierte nada, sustituyendo x por cero en la función beneficio.

$$B(0) = 50000 + 40 \cdot 0 - \left(\frac{0}{10}\right)^2 = 50000$$

Ahora debemos calcular el valor de x para el cual el beneficio es inferior a 50000 (si es que existe). Se iguala a 50000 el beneficio y se calcula el valor de x. Como la función es decreciente, a partir de esa cantidad invertida, el beneficio será menor.

$$50000 + 40x - \left(\frac{x}{10}\right)^2 = 50000 \longrightarrow 40x - \left(\frac{x}{10}\right)^2 = 0 \longrightarrow x \cdot \left(40 - \frac{x}{100}\right) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4000 \end{cases}$$

Si se invierten **más de 4000 euros**, los beneficios obtenidos serán inferiores a la cantidad obtenida sin invertir en publicidad.