Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS
Junio 2023

Problema 1
Programación lineal

PROBLEMA 1

El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas. En el mercado encuentro dos marcas A y B de comida para perros. Una lata de la marca A contiene 4 unidades de hidratos de carbono, 6 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Una lata de la marca B contiene 2 unidades de hidratos de carbono, 20 unidades de proteínas y 12 unidades de grasas. La lata de la marca A cuesta 10 euros y la lata de la marca B cuesta 16 euros.

a) ¿Cómo deberé combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio?

b) ¿Cuál es el mínimo precio que habré de pagar?

Solución: En primer lugar, se definen las incógnitas del problema.

x=número de latas de la marca A.
y=número de latas de la marca B.

Resumimos los datos del problema en una tabla.

		Hidratos de carbono	Proteínas	Grasas	Coste
A	x	4x	6x	X	10x
B	y	2y	20y	12y	16y

A partir de la tabla y del enunciado planteamos las restricciones:

PROBLEMA 1

		Hidratos de carbono	Proteínas	Grasas	Coste
A	x	4x	6x	x	10x
B	y	2y	20y	12y	16y

A partir de la tabla y del enunciado planteamos las restricciones:

"un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono" $\longrightarrow$ $4x + 2y \geq 8$

"un mínimo de 46 unidades de proteínas" $\longrightarrow$ $6x + 20y \geq 46$

"y un mínimo de 12 unidades de grasas." $\longrightarrow$ $x + 12y \geq 12$

"restricciones triviales" $\longrightarrow$ $x \geq 0; y \geq 0$

La función objetivo está definida por el coste: **z = 10x +16y**

PROBLEMA 1

Quedando el planteamiento definitivo así:

Minimizar : **z = 10x +16y**

$$s.a.\begin{cases} 4x+2y \geq 8 \\ 6x+20y \geq 46 \\ x+12y \geq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

En primer lugar, hacemos los cálculos para representar las inecuaciones.

$(\boldsymbol{a})\ 4x+2y \geq 8$

Expreso la recta: $4x+2y=8$

Se dan valores para representar:

x	**y**
0	4
2	0

Compruebo si (0,0) pertenece a la solución sustituyendo en la inecuación

$\mathbf{4 \cdot 0+2 \cdot 0 \geq 8}$ → **No Cumple** $(\mathbf{0},\mathbf{0}) \notin \{4x+2y \geq 8\}$

$(\boldsymbol{b})\ 6x+20y \geq 46$

Expreso la recta: $6x+20y=46$

Se dan valores para representar:

x	**y**
0	2,3
7,67	0

Compruebo si (0,0) pertenece a la solución sustituyendo en la inecuación

$\mathbf{6 \cdot 0+20 \cdot 0 \geq 46}$ → **No Cumple** $(\mathbf{0},\mathbf{0}) \notin \{6x+20y \geq 46\}$

$(\boldsymbol{c})\ x+12y \geq 12$

Expreso la recta: $x+2y=12$

Se dan valores para representar:

x	**y**
0	1
12	0

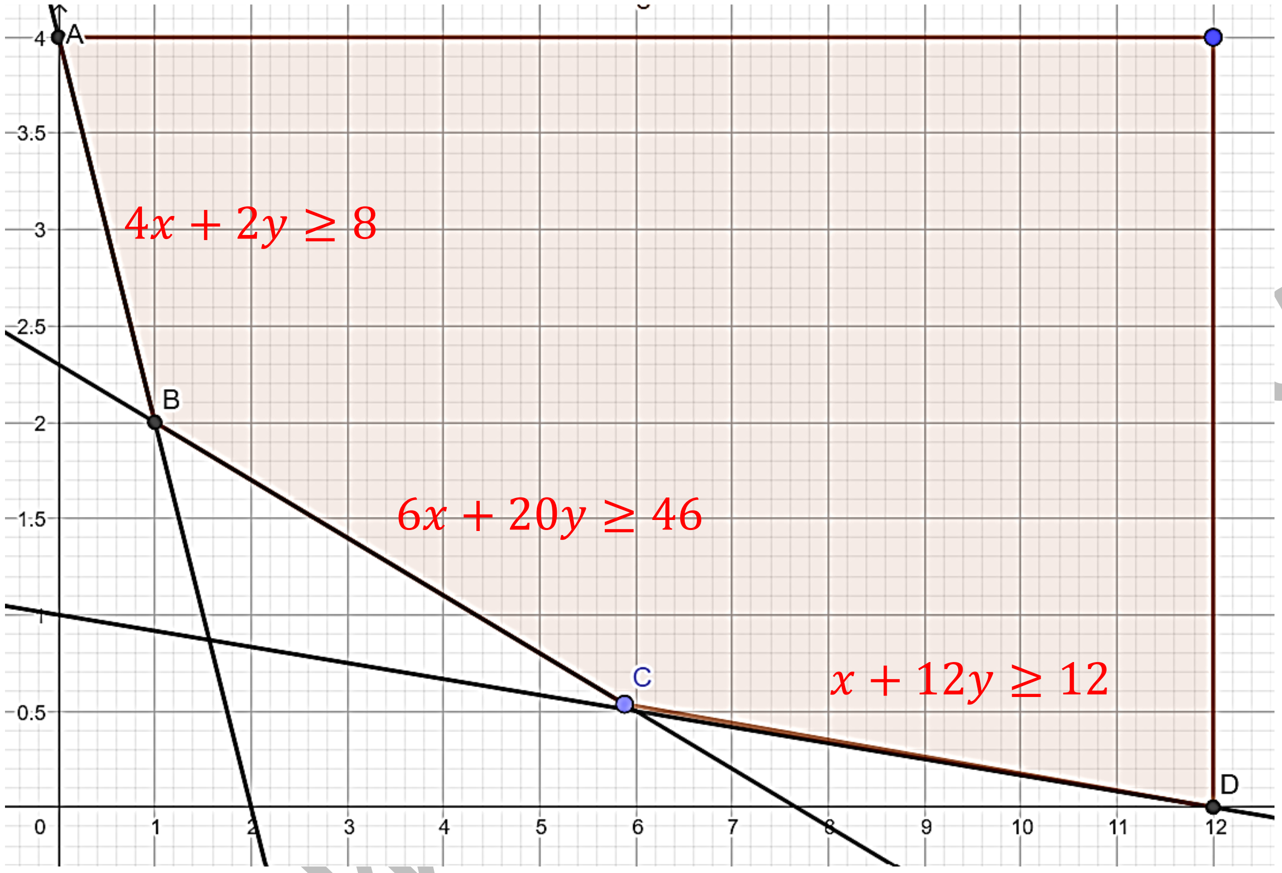
Compruebo si (0,0) pertenece a la solución sustituyendo en la inecuación

$\mathbf{0+12 \cdot 0 \geq 12}$ → **No Cumple** $(\mathbf{0},\mathbf{0}) \notin \{x+12y \geq 12\}$

PROBLEMA 1

Representamos las inecuaciones y observamos cual es la región factible.

$$s.a.\begin{cases} 4x+2y\geq 8 \\ 6x+20y\geq 46 \\ x+12y\geq 12 \\ x\geq 0; y\geq 0 \end{cases}$$



$4x+2y=8$

x	y
0	4
2	0

$6x+20y=46$

x	y
0	2,3
7,67	0

$x+12y=12$

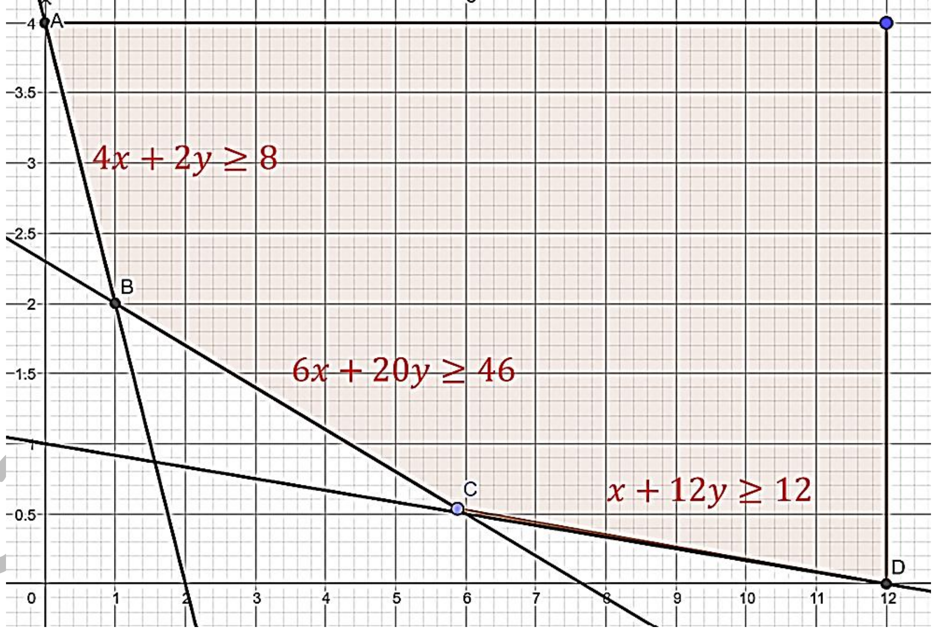
x	y
0	1
12	0

$\mathbf{4\cdot 0+2\cdot 0\geq 8}\quad (\mathbf{0},\mathbf{0})\notin\{4x+2y\geq 8\}$

$\mathbf{6\cdot 0+20\cdot 0\geq 46}\quad (\mathbf{0},\mathbf{0})\notin\{6x+20y\geq 46\}$

$\mathbf{0+12\cdot 0\geq 12}\quad (\mathbf{0},\mathbf{0})\notin\{x+12y\geq 12\}$

PROBLEMA 1



Para calcular los vértices B y C, se deben resolver los sistemas de ecuaciones formado por las rectas que dan lugar a dichos vértices. Los vértices A y D, no hace falta calcularlos porque ya disponemos de sus coordenadas.

Vértice B: $\begin{cases} 4x+2y=8 \\ 6x+20y=46 \end{cases}$

Resolvemos utilizando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 46 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 20 \end{vmatrix}}=\frac{68}{68}=1 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 46 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 20 \end{vmatrix}}=\frac{136}{68}=2$$

Las coordenadas del vértice B son: $\boldsymbol{B=(1,2)}$

Vértice C: $\begin{cases} x+12y=12 \\ 6x+20y=46 \end{cases}$ Resolvemos utilizando la regla de Cramer:

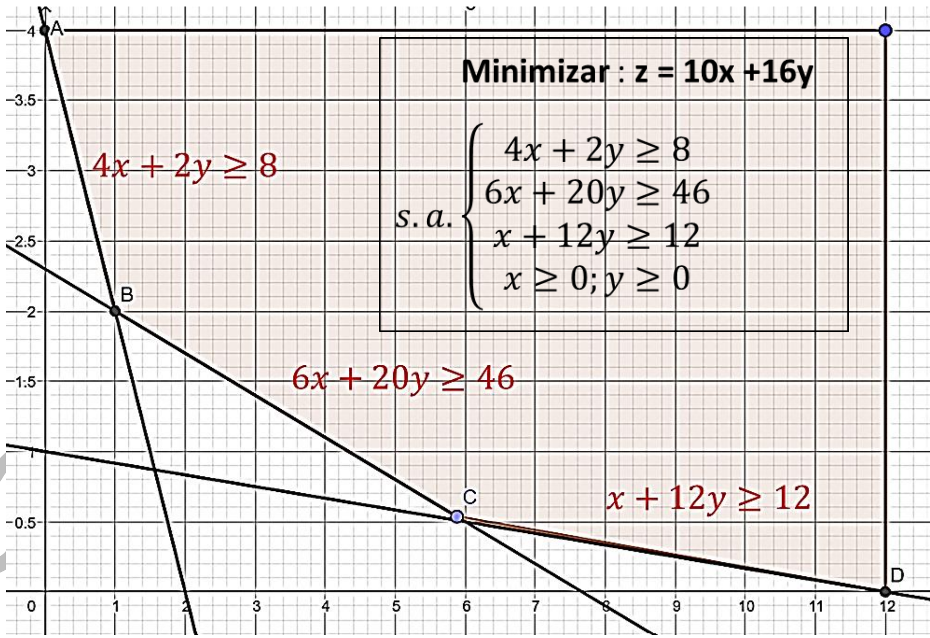
$$x=\frac{\begin{vmatrix} 12 & 12 \\ 46 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 20 \end{vmatrix}}=\frac{-312}{-52}=6 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 46 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 20 \end{vmatrix}}=\frac{-26}{-52}=0,5$$

Las coordenadas del vértice C son: $\boldsymbol{C=(6;0,5)}$

PROBLEMA 1

El **mínimo** de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices.

x	y	z = 10x +16y
0	**4**	10·0+16·4=64
1	**2**	10·1+16·2=42 **(mínimo).**
6	**0,5**	10·6+16·0,5=68
12	**0**	10·12+16·0=120



PROBLEMA 1

Solución: debe comprar **1 lata del tipo A y 2 latas del tipo B.** Con esta combinación, cumplirá las restricciones dadas y el coste será de **42 euros**.

x	y	z = 10x +16y
0	**4**	10·0+16·4=64
1	**2**	10·1+16·2=42 **(mínimo).**
6	**0,5**	10·6+16·0,5=68
12	**0**	10·12+16·0=120