Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS
Junio 2023

Problema 2
Álgebra matricial

Problema 2

Una matriz A se denomina normal si $A^t \cdot A = A \cdot A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a) Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal.

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $A^t \cdot X = B^t \cdot X - C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución: Asignamos una letra a la matriz dada. $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$

A continuación, se calcula la matriz traspuesta de D: $D^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$

Se calculan los dos productos que define la igualdad del enunciado.

$$D^t \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot x \\ 1 \cdot 2 + x \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + x \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 - x \\ 2 - x & 1 + x^2 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot D^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + x \cdot x \\ -1 \cdot 2 + x \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + x \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 + x \\ -2 + x & 1 + x^2 \end{pmatrix}$$

Problema 2

Una matriz A se denomina normal si $A^t \cdot A = A \cdot A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a) Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal.

Solución:

Para que la matriz D sea normal, debe verificarse que: $D^t \cdot D = D \cdot D^t \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2-x \\ 2-x & 1+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2+x \\ -2+x & 1+x^2 \end{pmatrix}$

Para que dos matrices sean iguales, tienen que serlo sus elementos a_{ij}. $\longrightarrow \begin{cases} 5 = 5 \\ 2-x = -2+x \\ 2-x = -2+x \\ 1+x^2 = 1+x^2 \end{cases}$

Sólo una de las ecuaciones nos aporta información. $2-x=-2+x \longrightarrow 4 = 2x \longrightarrow x = 2$

$\boxed{\boldsymbol{D} \text{ es una matriz normal si, } \boldsymbol{x = 2}}$

Problema 2

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $A^t \cdot X = B^t \cdot X - C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Se despeja X de la ecuación matricial.

$$A \cdot X = B^t \cdot X - C \longrightarrow A \cdot X - B^t \cdot X = -C \longrightarrow (A - B^t) \cdot X = -C$$

Se multiplica por la inversa a ambos lados de la ecuación.

$$(A - B^t)^{-1} \cdot (A - B^t) \cdot X = (A - B^t)^{-1} \cdot (-C) \longrightarrow I \cdot X = (A - B^t)^{-1} \cdot (-C) \longrightarrow X = (A - B^t)^{-1} \cdot (-C)$$

Para calcular X, debemos calcular $(A - B^t)$ y $(-C)$.

$$A - B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(-C) = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 2

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $A^t \cdot X = B^t \cdot X - C$, donde

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ $\boxed{X = (A - B^t)^{-1} \cdot (-C)}$ $A - B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Para calcular X, debemos calcular $(A - B^t)^{-1}$ Calculo la **matriz inversa** por el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|A - B^t| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1 \neq 0 \rightarrow La\ matriz\ tiene\ inversa$

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(A - B^t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $\left(Adj(A - B^t)\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $(A - B^t)^{-1} = \dfrac{1}{|A - B^t|}(Adj(A - B^t))^t = \dfrac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 2

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $A^t \cdot X = B^t \cdot X - C$, donde

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{X = (A - B^t)^{-1} \cdot (-C)}$$

$$(-C) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A - B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular X, ya sólo queda multiplicar las matrices calculadas anteriormente.

$$X = (A - B^t)^{-1} \cdot (-C) \quad = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 3 & (-1)\cdot(-2) + (-1)\cdot 3 \\ 1\cdot(-1) + 0\cdot 3 & 1\cdot(-2) + 0\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Solución\text{: } \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}}$$