Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS

Junio 2023

Problema 3

Análisis de una función

Problema 3

Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución: Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $2x^2-3x-2=0$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{3\pm 5}{4}\longrightarrow\begin{cases}x_1=2\\x_2=-1/2\end{cases}$$

Por ello, el Dominio es:

$$\boxed{\boldsymbol{Dom\ f(x)=R-\{-1/2,2\}}}$$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ Y(x=0)\rightarrow f(0)=\frac{0^2+2\cdot 0-15}{2\cdot 0^2-3\cdot 0-2}=\frac{15}{2}\rightarrow\boxed{\boldsymbol{A=(0,15/2)}}$$

$$Eje\ X\ (y=0)\rightarrow\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=0\rightarrow x^2+2x-15=0\rightarrow\begin{cases}x_1=3\\x_2=-5\end{cases}\quad\boxed{\begin{matrix}\boldsymbol{B=(3,0)}\\\boldsymbol{C=(-5,0)}\end{matrix}}$$

Problema 3

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

En x=−1/2; $\lim_{x\to -1/2} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = \frac{-15,75}{0}$ $\begin{cases} \lim_{x\to(-1/2)^+} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = \frac{-15,75}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x\to(-1/2)^-} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = \frac{-15,75}{0^+} = -\infty \end{cases}$ $, luego$ $\boxed{\boldsymbol{x=-1/2\ es\ A.V.\ de\ f(x)}}$

En x=2; $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = \frac{-7}{0}$ $\begin{cases} \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = \frac{-7}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = \frac{-7}{0^-} = +\infty \end{cases}$ $, luego$ $\boxed{\boldsymbol{x=2\ es\ A.V.\ de\ f(x)}}$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función en el último apartado.

Problema 3

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

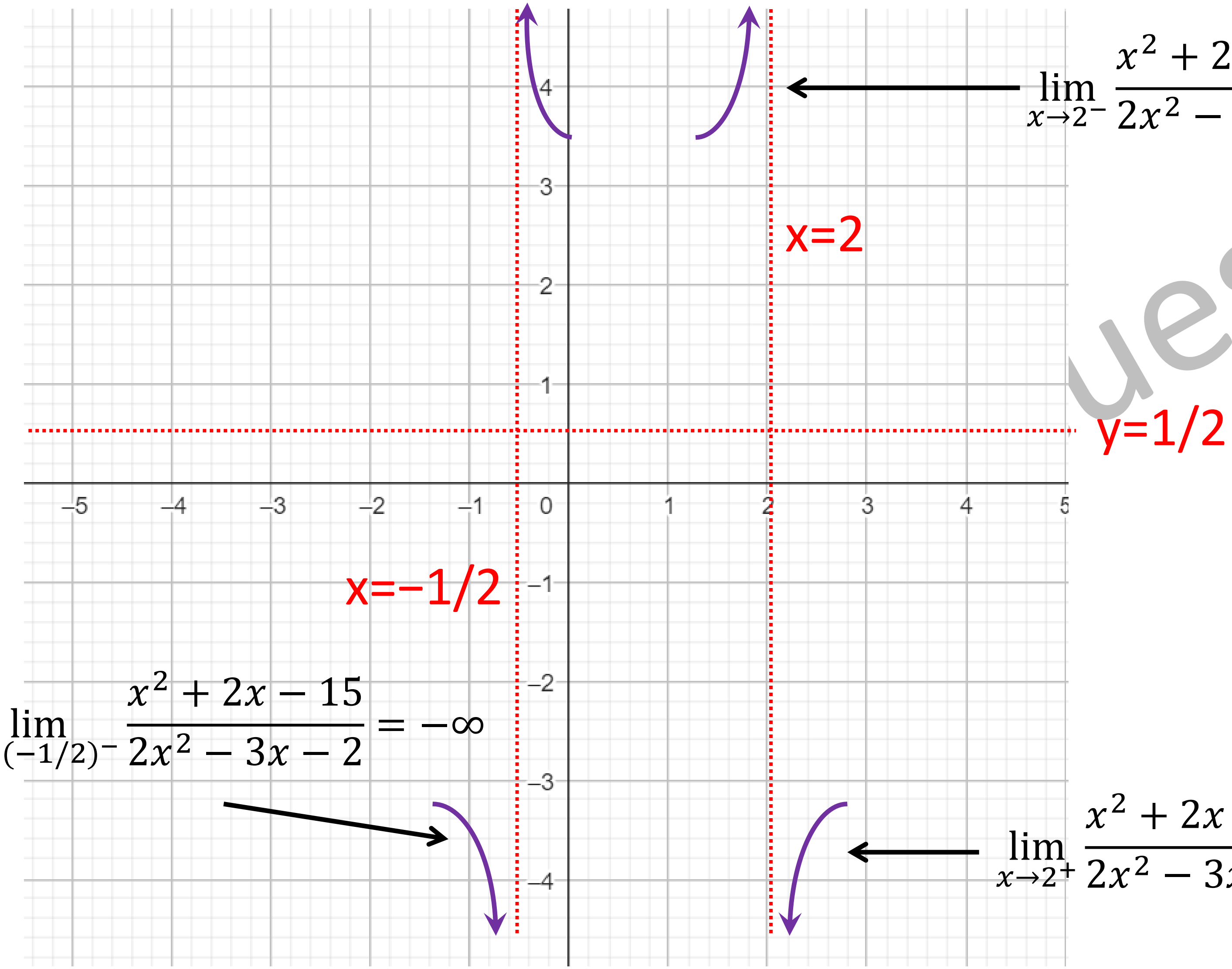
$$\boxed{por\ lo\ tanto, \boldsymbol{y = 1/2\ es\ A.H.de\ f(x)}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.

$$\lim_{x \to (-1/2)^+} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2} = +\infty$$



$$\lim_{x \to (-1/2)^-} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2} = -\infty$$

Problema 3

$$f(x)=\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}$$

Se calcula la derivada.

$$f'(x)=\frac{(2x+2)\cdot(2x^2-3x-2)-(x^2+2x-15)\cdot(4x-3)}{(2x^2-3x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^3-6x^2-4x+4x^2-6x-4-(4x^3-3x^2+8x^2-6x-60x+45)}{(2x^2-3x-2)^2}=\frac{-7x^2+56x-49}{(2x^2-3x-2)^2}$$

Igualamos la derivada a cero: $\dfrac{-7x^2+56x-49}{(2x^2-3x-2)^2}=0 \longrightarrow -7x^2+56x-49=0 \longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=7 \end{cases}$

Se estudia el signo de la derivada:

	$-\infty$ a $-1/2$	$-1/2$ a 1	1 a 2	2 a 7	7 a $+\infty$
f'(x)	−	−	+	+	−
f(x)	↘	↘	↗	↗	↘

f(x) es **decreciente** en $x\epsilon(-\infty,-1/2)\cup\ (-1/2,1).\cup\ (7,+\infty)$. y **creciente** en $x\epsilon(1,2)\ \cup\ (2,7)$.

Problema 3

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$ … $-1/2$	$-1/2$ … 1	1 … 2	2 … 7	7 … $+\infty$
f'(x)	−	−	+	+	−
f(x)	↘	↘	↗	↗	↘

Se observa en el cuadro que la función tiene un mínimo relativo en x=1 y un máximo relativo en x=7.

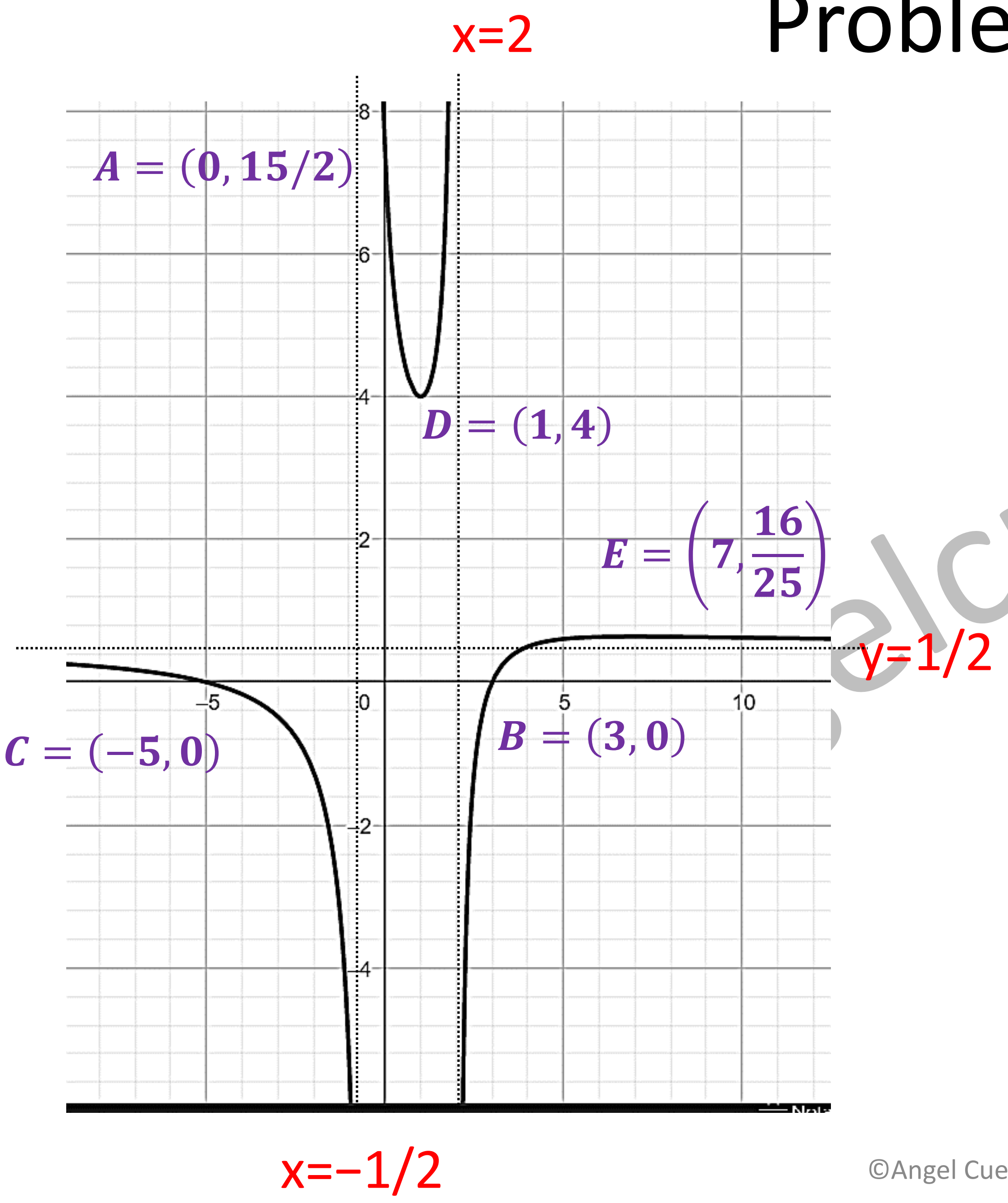
Se sustituyen esos valores en la función para obtener las coordenadas del máximo y del mínimo relativo.

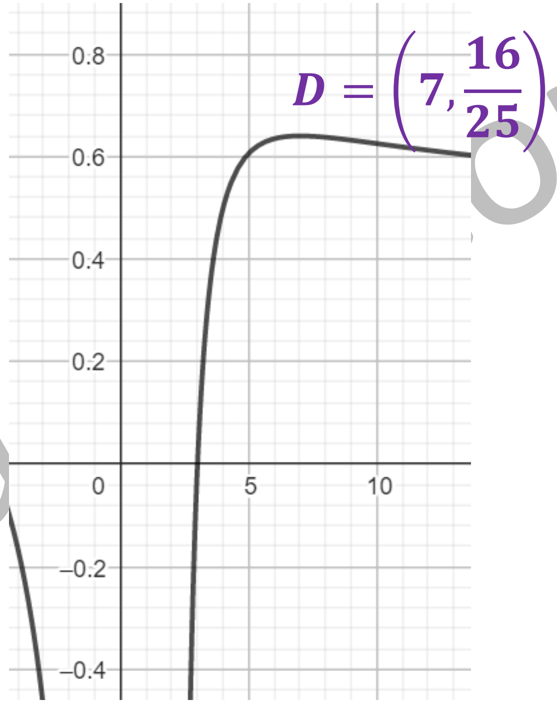
$$f(1)=\frac{1^2+2\cdot 1-15}{2\cdot 1^2-3\cdot 1-2}=\frac{-12}{-3}=4 \qquad f(7)=\frac{7^2+2\cdot 7-15}{2\cdot 7^2-3\cdot 7-2}=\frac{48}{75}=\frac{16}{25}=0{,}64$$

Las coordenadas del mínimo relativo son: $\boxed{\mathbf{(1,4)}}$

Las coordenadas del máximo relativo son: $\boxed{\left(\mathbf{7},\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{25}}\right)}$

Problema 3





AMPLICACIÓN DE LA ZONA DEL MÁXIMO RELATIVO