Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS
Junio 2023

Problema 1
Programación lineal

PROBLEMA 1

El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas. En el mercado encuentro dos marcas A y B de comida para perros. Una lata de la marca A contiene 4 unidades de hidratos de carbono, 6 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Una lata de la marca B contiene 2 unidades de hidratos de carbono, 20 unidades de proteínas y 12 unidades de grasas. La lata de la marca A cuesta 10 euros y la lata de la marca B cuesta 16 euros.

a) ¿Cómo deberé combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio?

b) ¿Cuál es el mínimo precio que habré de pagar?

Solución: En primer lugar, se definen las incógnitas del problema.

x=número de latas de la marca A.
y=número de latas de la marca B.

Resumimos los datos del problema en una tabla.

		Hidratos de carbono	Proteínas	Grasas	Coste
A	x	4x	6x	X	10x
B	y	2y	20y	12y	16y

A partir de la tabla y del enunciado planteamos las restricciones:

PROBLEMA 1

		Hidratos de carbono	Proteínas	Grasas	Coste
A	x	4x	6x	x	10x
B	y	2y	20y	12y	16y

A partir de la tabla y del enunciado planteamos las restricciones:

“un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono” $\longrightarrow$ $4x + 2y \geq 8$

“un mínimo de 46 unidades de proteínas” $\longrightarrow$ $6x + 20y \geq 46$

“y un mínimo de 12 unidades de grasas.” $\longrightarrow$ $x + 12y \geq 12$

“restricciones triviales” $\longrightarrow$ $x \geq 0; y \geq 0$

La función objetivo está definida por el coste: **z = 10x +16y**

PROBLEMA 1

Quedando el planteamiento definitivo así: En primer lugar, hacemos los cálculos para representar las inecuaciones.

Minimizar : **z = 10x +16y**

$$s.a.\begin{cases} 4x+2y\geq 8 \\ 6x+20y\geq 46 \\ x+12y\geq 12 \\ x\geq 0;\, y\geq 0 \end{cases}$$

$(\boldsymbol{a})\ 4x+2y\geq 8$

Expreso la recta: $4x+2y=8$

Se dan valores para representar:

x	**y**
0	4
2	0

Compruebo si (0,0) pertenece a la solución sustituyendo en la inecuación

$\mathbf{4\cdot 0+2\cdot 0\geq 8}$ → **No Cumple** $(\mathbf{0},\mathbf{0})\notin\{4x+2y\geq 8\}$

$(\boldsymbol{b})\ 6x+20y\geq 46$

Expreso la recta: $6x+20y=46$

Se dan valores para representar:

x	**y**
0	2,3
7,67	0

Compruebo si (0,0) pertenece a la solución sustituyendo en la inecuación

$\mathbf{6\cdot 0+20\cdot 0\geq 46}$ → **No Cumple** $(\mathbf{0},\mathbf{0})\notin\{6x+20y\geq 46\}$

$(\boldsymbol{c})\ x+12y\geq 12$

Expreso la recta: $x+2y=12$

Se dan valores para representar:

x	**y**
0	1
12	0

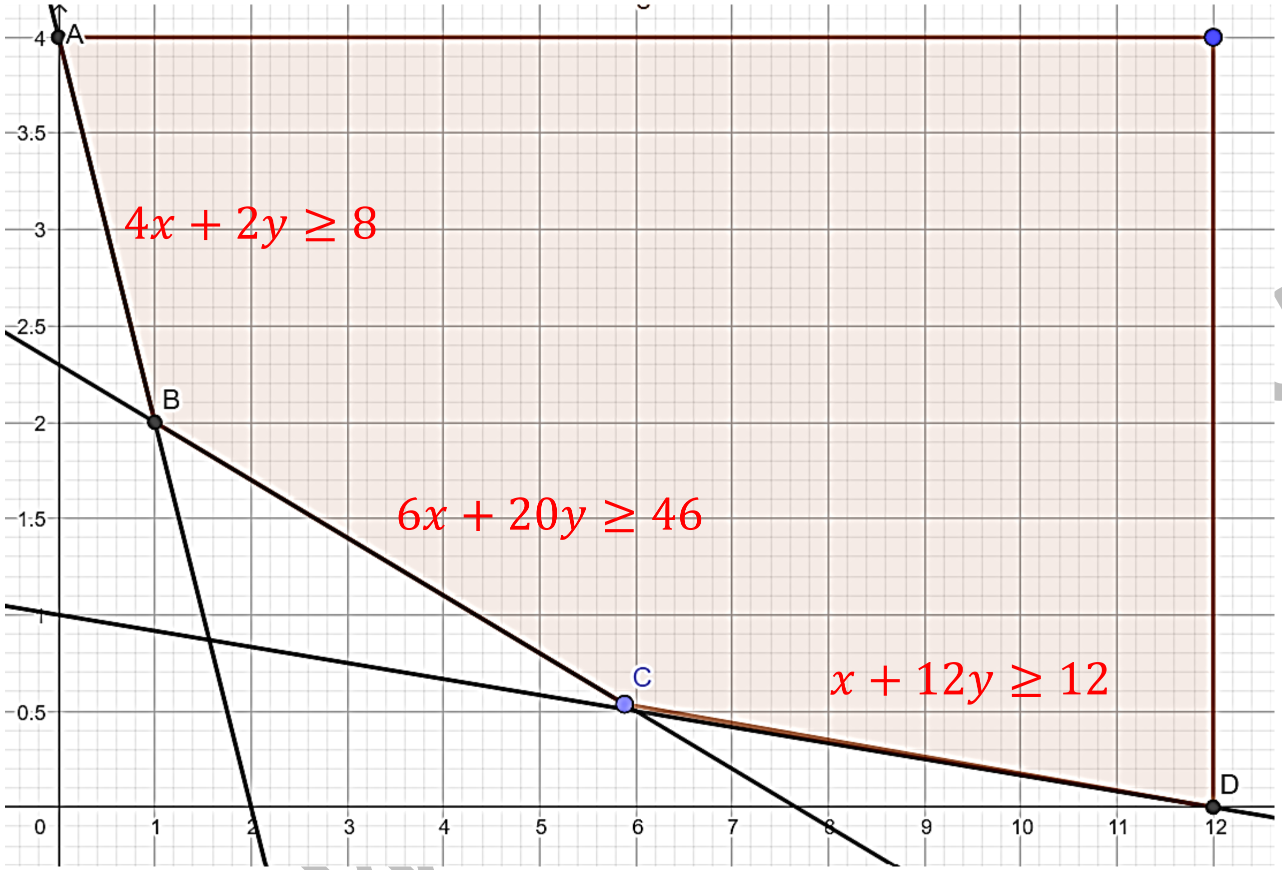
Compruebo si (0,0) pertenece a la solución sustituyendo en la inecuación

$\mathbf{0+12\cdot 0\geq 12}$ → **No Cumple** $(\mathbf{0},\mathbf{0})\notin\{x+12y\geq 12\}$

PROBLEMA 1

Representamos las inecuaciones y observamos cual es la región factible.

$$s.a. \begin{cases} 4x + 2y \geq 8 \\ 6x + 20y \geq 46 \\ x + 12y \geq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$



$4x + 2y = 8$

x	y
0	4
2	0

$6x + 20y = 46$

x	y
0	2,3
7,67	0

$x + 12y = 12$

x	y
0	1
12	0

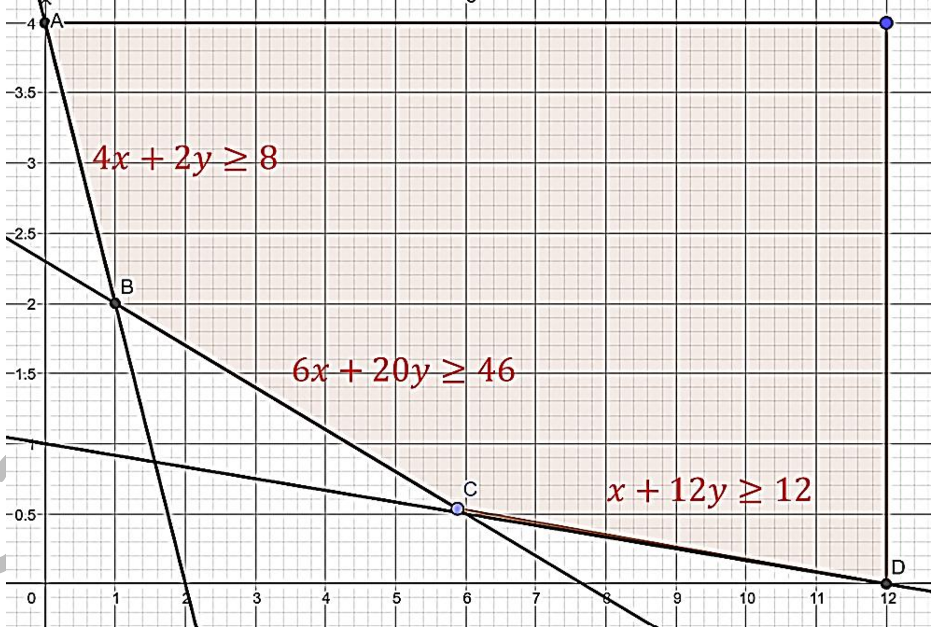
$\mathbf{4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \geq 8} \quad (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \notin \{4x + 2y \geq 8\}$

$\mathbf{6 \cdot 0 + 20 \cdot 0 \geq 46} \quad (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \notin \{6x + 20y \geq 46\}$

$\mathbf{0 + 12 \cdot 0 \geq 12} \quad (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \notin \{x + 12y \geq 12\}$

PROBLEMA 1

Para calcular los vértices B y C, se deben resolver los sistemas de ecuaciones formado por las rectas que dan lugar a dichos vértices. Los vértices A y D, no hace falta calcularlos porque ya disponemos de sus coordenadas.



Vértice B: $\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 6x + 20y = 46 \end{cases}$

Resolvemos utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 46 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{68}{68} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 46 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{136}{68} = 2$$

Las coordenadas del vértice B son: $\boldsymbol{B = (1, 2)}$

Vértice C: $\begin{cases} x + 12y = 12 \\ 6x + 20y = 46 \end{cases}$ Resolvemos utilizando la regla de Cramer:

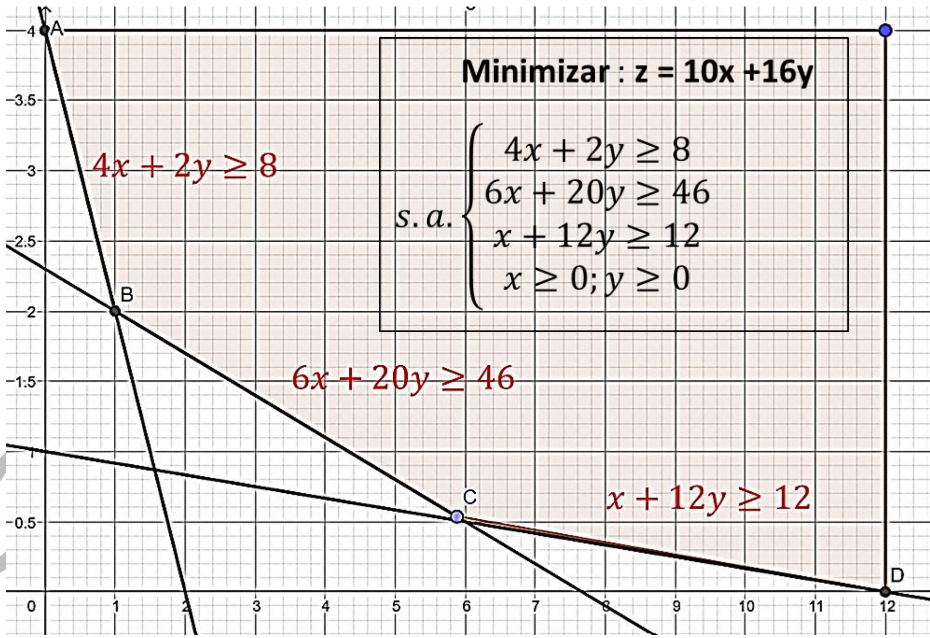
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 12 \\ 46 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{-312}{-52} = 6 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 46 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{-26}{-52} = 0{,}5$$

Las coordenadas del vértice C son: $\boldsymbol{C = (6; 0{,}5)}$

PROBLEMA 1

El **mínimo** de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices.

x	y	z = 10x +16y
0	**4**	10·0+16·4=64
1	**2**	10·1+16·2=42 **(mínimo).**
6	**0,5**	10·6+16·0,5=68
12	**0**	10·12+16·0=120



PROBLEMA 1

Solución: debe comprar **1 lata del tipo A y 2 latas del tipo B.** Con esta combinación, cumplirá las restricciones dadas y el coste será de **42 euros**.

x	y	z = 10x +16y
0	**4**	10·0+16·4=64
1	**2**	10·1+16·2=42 **(mínimo).**
6	**0,5**	10·6+16·0,5=68
12	**0**	10·12+16·0=120

Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS
Junio 2023

Problema 2
Álgebra matricial

Problema 2

Una matriz A se denomina normal si $A^t \cdot A = A \cdot A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a) Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal.

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $A^t \cdot X = B^t \cdot X - C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución: Asignamos una letra a la matriz dada. $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$

A continuación, se calcula la matriz traspuesta de D: $D^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$

Se calculan los dos productos que define la igualdad del enunciado.

$$D^t \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot x \\ 1 \cdot 2 + x \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + x \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 - x \\ 2 - x & 1 + x^2 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot D^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + x \cdot x \\ -1 \cdot 2 + x \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + x \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 + x \\ -2 + x & 1 + x^2 \end{pmatrix}$$

Problema 2

Una matriz A se denomina normal si $A^t \cdot A = A \cdot A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a) Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal.

Solución:

Para que la matriz D sea normal, debe verificarse que: $D^t \cdot D = D \cdot D^t \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2-x \\ 2-x & 1+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2+x \\ -2+x & 1+x^2 \end{pmatrix}$

Para que dos matrices sean iguales, tienen que serlo sus elementos a_{ij}. $\longrightarrow \begin{cases} 5 = 5 \\ 2-x = -2+x \\ 2-x = -2+x \\ 1+x^2 = 1+x^2 \end{cases}$

Sólo una de las ecuaciones nos aporta información. $2 - x = -2 + x \longrightarrow 4 = 2x \longrightarrow x = 2$

$\boxed{\boldsymbol{D} \text{ es una matriz normal si, } \boldsymbol{x = 2}}$

Problema 2

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $A^t \cdot X = B^t \cdot X - C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Se despeja X de la ecuación matricial.

$$A \cdot X = B^t \cdot X - C \longrightarrow A \cdot X - B^t \cdot X = -C \longrightarrow (A - B^t) \cdot X = -C$$

Se multiplica por la inversa a ambos lados de la ecuación.

$$(A - B^t)^{-1} \cdot (A - B^t) \cdot X = (A - B^t)^{-1} \cdot (-C) \longrightarrow I \cdot X = (A - B^t)^{-1} \cdot (-C) \longrightarrow X = (A - B^t)^{-1} \cdot (-C)$$

Para calcular X, debemos calcular $(A - B^t)$ y $(-C)$.

$$A - B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(-C) = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 2

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $A^t \cdot X = B^t \cdot X - C$, donde

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ $\boxed{X = (A - B^t)^{-1} \cdot (-C)}$ $A - B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Para calcular X, debemos calcular $(A - B^t)^{-1}$ Calculo la **matriz inversa** por el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|A - B^t| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1 \neq 0 \rightarrow La\ matriz\ tiene\ inversa$

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(A - B^t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $\left(Adj(A - B^t)\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $(A - B^t)^{-1} = \frac{1}{|A - B^t|}(Adj(A - B^t))^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 2

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $A^t \cdot X = B^t \cdot X - C$, donde

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ $\boxed{X = (A - B^t)^{-1} \cdot (-C)}$

$$(-C) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A - B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular X, ya sólo queda multiplicar las matrices calculadas anteriormente.

$$X = (A - B^t)^{-1} \cdot (-C) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 & (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \\ 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 & 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Solución\text{: } \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}}$$

Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS

Junio 2023

Problema 3

Análisis de una función

Problema 3

Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución: Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $2x^2 - 3x - 2 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1/2 \end{cases}$$

Por ello, el Dominio es:

$$\boxed{\boldsymbol{Dom\, f(x) = R - \{-1/2, 2\}}}$$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ Y (x = 0) \rightarrow f(0) = \frac{0^2 + 2 \cdot 0 - 15}{2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 - 2} = \frac{15}{2} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = (0, 15/2)}}$$

$$Eje\ X\ (y = 0) \rightarrow \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2} = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5 \end{cases} \quad \boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{B = (3, 0)} \\ \boldsymbol{C = (-5, 0)} \end{array}}$$

Problema 3

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

En x=−1/2; $\lim_{x\to -1/2} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = \frac{-15,75}{0}$ $\begin{cases} \lim_{x\to(-1/2)^+} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = \frac{-15,75}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x\to(-1/2)^-} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = \frac{-15,75}{0^+} = -\infty \end{cases}$ $, luego$ $\boxed{\boldsymbol{x=-1/2\ es\ A.V.de\ f(x)}}$

En x=2; $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = \frac{-7}{0}$ $\begin{cases} \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = \frac{-7}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = \frac{-7}{0^-} = +\infty \end{cases}$ $, luego$ $\boxed{\boldsymbol{x=2\ es\ A.V.de\ f(x)}}$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función en el último apartado.

Problema 3

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

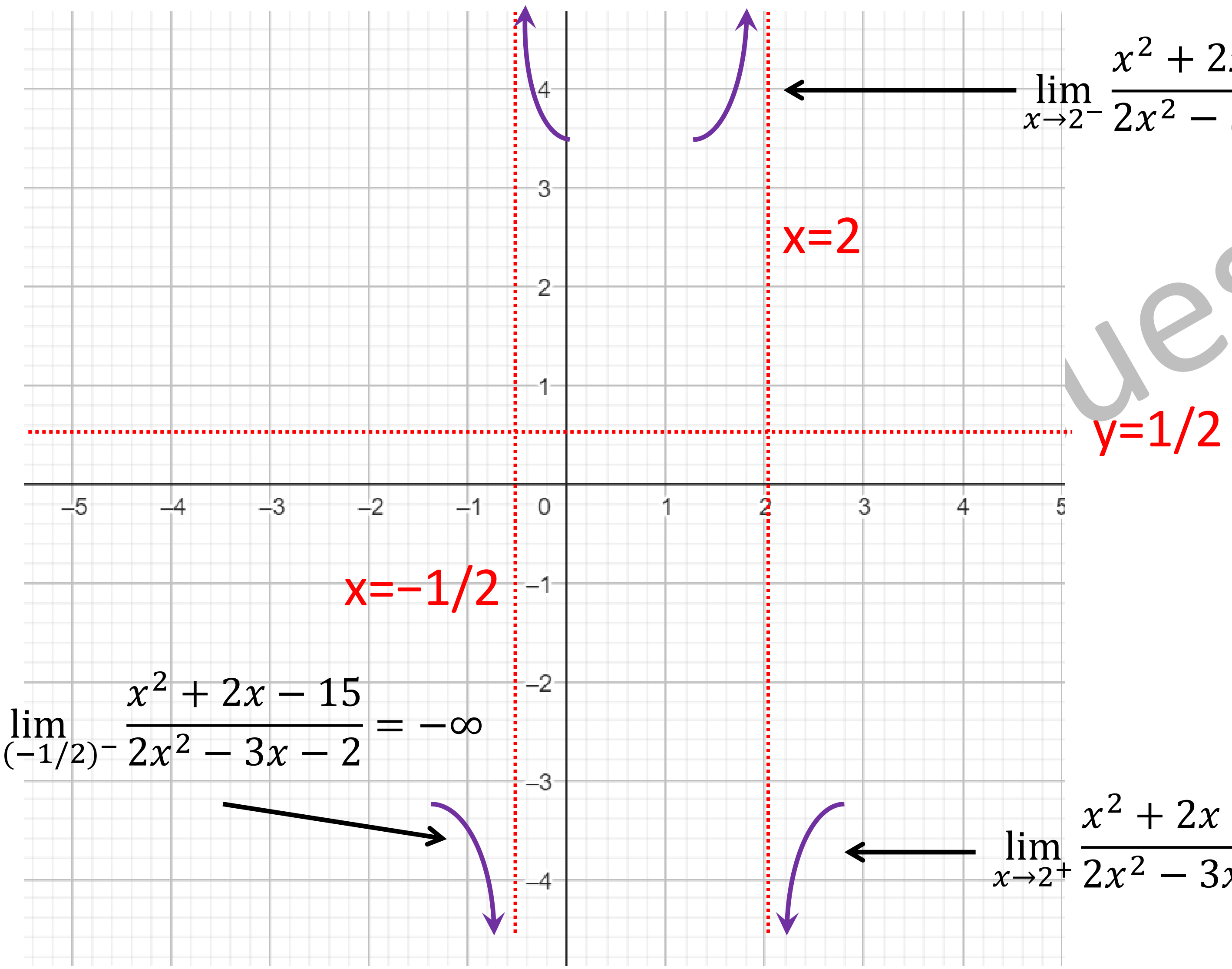
$$\boxed{por\ lo\ tanto, \boldsymbol{y = 1/2\ es\ A.H.\ de\ f(x)}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.

$$\lim_{x\to(-1/2)^+} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=+\infty$$



$$\lim_{x\to(-1/2)^-} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=-\infty$$

Problema 3

$$f(x)=\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}$$

Se calcula la derivada.

$$f'(x)=\frac{(2x+2)\cdot(2x^2-3x-2)-(x^2+2x-15)\cdot(4x-3)}{(2x^2-3x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^3-6x^2-4x+4x^2-6x-4-(4x^3-3x^2+8x^2-6x-60x+45)}{(2x^2-3x-2)^2}=\frac{-7x^2+56x-49}{(2x^2-3x-2)^2}$$

Igualamos la derivada a cero: $\frac{-7x^2+56x-49}{(2x^2-3x-2)^2}=0 \longrightarrow -7x^2+56x-49=0 \longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=7 \end{cases}$

Se estudia el signo de la derivada:

	$(-\infty,-1/2)$	$(-1/2,1)$	$(1,2)$	$(2,7)$	$(7,+\infty)$
f'(x)	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
f(x)	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

f(x) es **decreciente** en $x\epsilon(-\infty,-1/2)\cup\ (-1/2,1).\cup\ (7,+\infty)$. y **creciente** en $x\epsilon(1,2)\ \cup\ (2,7)$.

Problema 3

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$ a $-1/2$	$-1/2$ a 1	1 a 2	2 a 7	7 a $+\infty$
f'(x)	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
f(x)	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Se observa en el cuadro que la función tiene un mínimo relativo en x=1 y un máximo relativo en x=7.

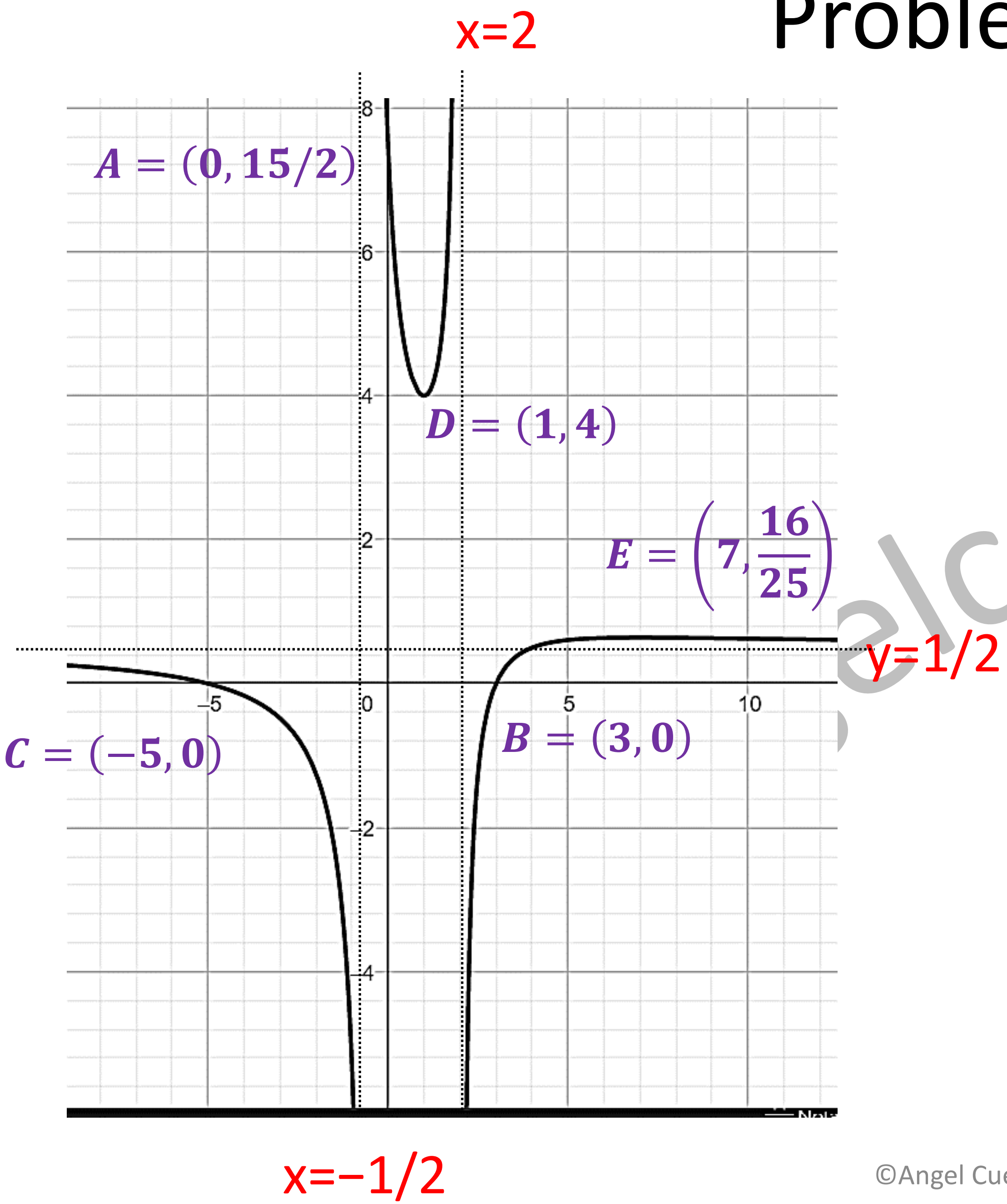
Se sustituyen esos valores en la función para obtener las coordenadas del máximo y del mínimo relativo.

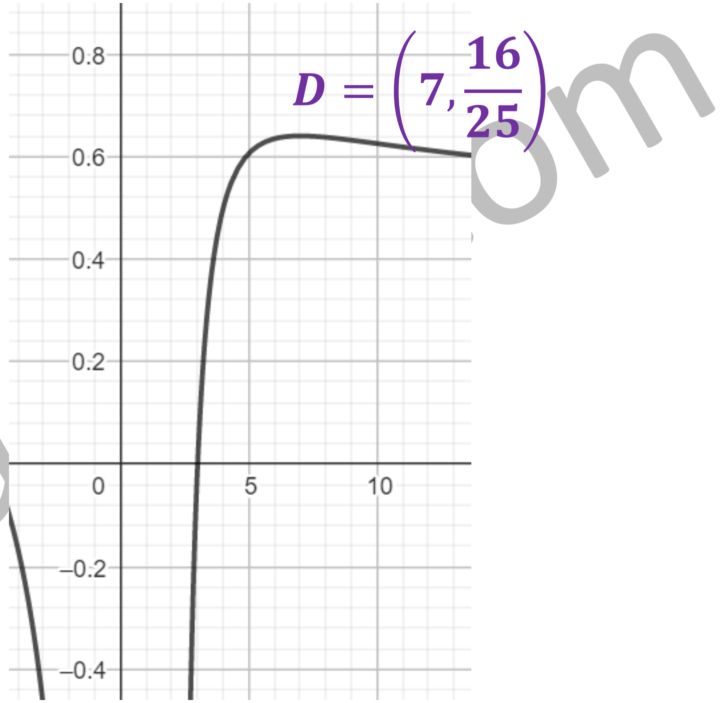
$$f(1) = \frac{1^2 + 2 \cdot 1 - 15}{2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2} = \frac{-12}{-3} = 4 \qquad f(7) = \frac{7^2 + 2 \cdot 7 - 15}{2 \cdot 7^2 - 3 \cdot 7 - 2} = \frac{48}{75} = \frac{16}{25} = 0{,}64$$

Las coordenadas del mínimo relativo son: $\boxed{\mathbf{(1, 4)}}$

Las coordenadas del máximo relativo son: $\boxed{\left(\mathbf{7}, \mathbf{\frac{16}{25}}\right)}$

Problema 3





AMPLICACIÓN DE LA ZONA DEL MÁXIMO RELATIVO

Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS
Junio 2023

Problema 4
Funciones a trozos

Problema 4

Una pequeña empresa paga una cuota fija mensual a su compañía eléctrica de 1 200 euros. Además de la cuota fija, los primeros 250 kWh consumidos los paga a 5 euros cada uno; los siguientes, hasta los 900 kWh, a 3 euros cada uno; y el resto a 2 euros cada uno.

a) ¿A cuánto asciende el recibo de un mes de la empresa si ese mes consumió 400 kWh?

b) Obtén la función que dé el importe del recibo mensual de la empresa si consume x kWh. **Dibuja su gráfica**.

c) Otra pequeña empresa, con la misma cuota fija, paga todos los kWh a 3 euros. ¿Puede ocurrir que en un mes las dos empresas consuman lo mismo y además sus recibos coincidan? En caso afirmativo indica cuál será en ese mes el consumo y el importe del recibo de ambas empresas.

Solución:

Del enunciado se deducen varias cosas importantes.

En primer lugar, la compañía paga un fijo en la factura de la luz (independientemente de la energía que consuma).

Por otro lado, se observa que hay tres tramos en función del consumo de energía.

Problema 4

Una pequeña empresa paga una cuota fija mensual a su compañía eléctrica de 1 200 euros. Además de la cuota fija, los primeros 250 kWh consumidos los paga a 5 euros cada uno; los siguientes, hasta los 900 kWh, a 3 euros cada uno; y el resto a 2 euros cada uno.

a) ¿A cuánto asciende el recibo de un mes de la empresa si ese mes consumió 400 kWh?

Como puede observarse, la empresa deberá pagar el coste fijo, los primeros 250 kWh que consuma a 5 €/kWh y los 150 kWh restantes, los pagará a un precio de 3 €/kWh.

$Coste\ fijo: 1200\ €$ $\quad$ $Coste\ primer\ tramo: 250 \cdot 5 = 1250\ €$ $\quad$ $Coste\ segundo\ tramo: 150 \cdot 3 = 450\ €$

$$Coste\ total = Coste\ fijo + Coste\ primer\ tramo + Coste\ segundo\ tramo = 1200 + 1250 + 450 = \mathbf{2900}\ €$$

Es recibo ascenderá a 2900 € si la empresa consume 400 kWh ese mes.

Problema 4

Una pequeña empresa paga una cuota fija mensual a su compañía eléctrica de 1 200 euros. Además de la cuota fija, los primeros 250 kWh consumidos los paga a 5 euros cada uno; los siguientes, hasta los 900 kWh, a 3 euros cada uno; y el resto a 2 euros cada uno.

b) Obtén la función que dé el importe del recibo mensual de la empresa si consume x kWh. **Dibuja su gráfica**.

Se analiza el coste de la factura en función del tramo de consumo en el que se encuentre la empresa.

$$Primer\ tramo: Coste = Coste\ fijo + 5 \cdot x \longrightarrow \boldsymbol{f_1(x) = 1200 + 5 \cdot x}; \qquad \boldsymbol{0 \leq x \leq 250}$$

$$Segundo\ tramo: Coste = Coste\ fijo + Coste\ de\ los\ primeros\ 250\ kWh + Coste\ del\ resto\ de\ kWh$$

$$f_2(x) = 1200 + 5 \cdot 250 + 3 \cdot (x - 250) = 1200 + 1250 + 3 \cdot x - 750 = \boldsymbol{1700 + 3 \cdot x}; \qquad \boldsymbol{250 < x \leq 900}$$

$$Tercer\ tramo: Coste = Coste\ fijo + Coste\ de\ los\ primeros\ 900\ kWh (2\ tramos) + Coste\ del\ resto\ de\ kWh$$

$$f_3(x) = 1200 + 5 \cdot 250 + 3 \cdot (900 - 250) + 2 \cdot (x - 900) = 1200 + 1250 + 1950 + 2 \cdot x - 1800$$

$$\boldsymbol{f_3(x) = 2600 + 2 \cdot x}; \qquad \boldsymbol{x > 900}$$

Problema 4

b) Obtén la función que dé el importe del recibo mensual de la empresa si consume x kWh. **Dibuja su gráfica**.

Expresamos la función a trozos con una sola expresión.

$$f(x) = \begin{cases} 1200 + 5 \cdot x; & 0 \leq x \leq 250 \\ 1700 + 3 \cdot x; & 250 < x \leq 900 \\ 2600 + 2 \cdot x; & x > 900 \end{cases}$$

Damos valores a cada trozo de la función para hacer la representación gráfica. Al ser funciones lineales, basta con dar valores.

$(a) \quad f_1(x) = 1200 + 5 \cdot x$

x	y
0	1200
250	2450

$(b) \quad f_2(x) = 1700 + 3 \cdot x$

x	y
250	2450
900	4400

$(c) \quad f_3(x) = 2600 + 2 \cdot x$

x	y
900	4400
1200	5000

Problema 4

b) Obtén la función que dé el importe del recibo mensual de la empresa si consume x kWh. **Dibuja su gráfica**.

$$f(x) = \begin{cases} 1200 + 5 \cdot x; & 0 \le x \le 250 \\ 1700 + 3 \cdot x; & 250 < x \le 900 \\ 2600 + 2 \cdot x; & x > 900 \end{cases}$$

$(a) \quad f_1(x) = 1200 + 5 \cdot x$

x	y
0	1200
250	2450

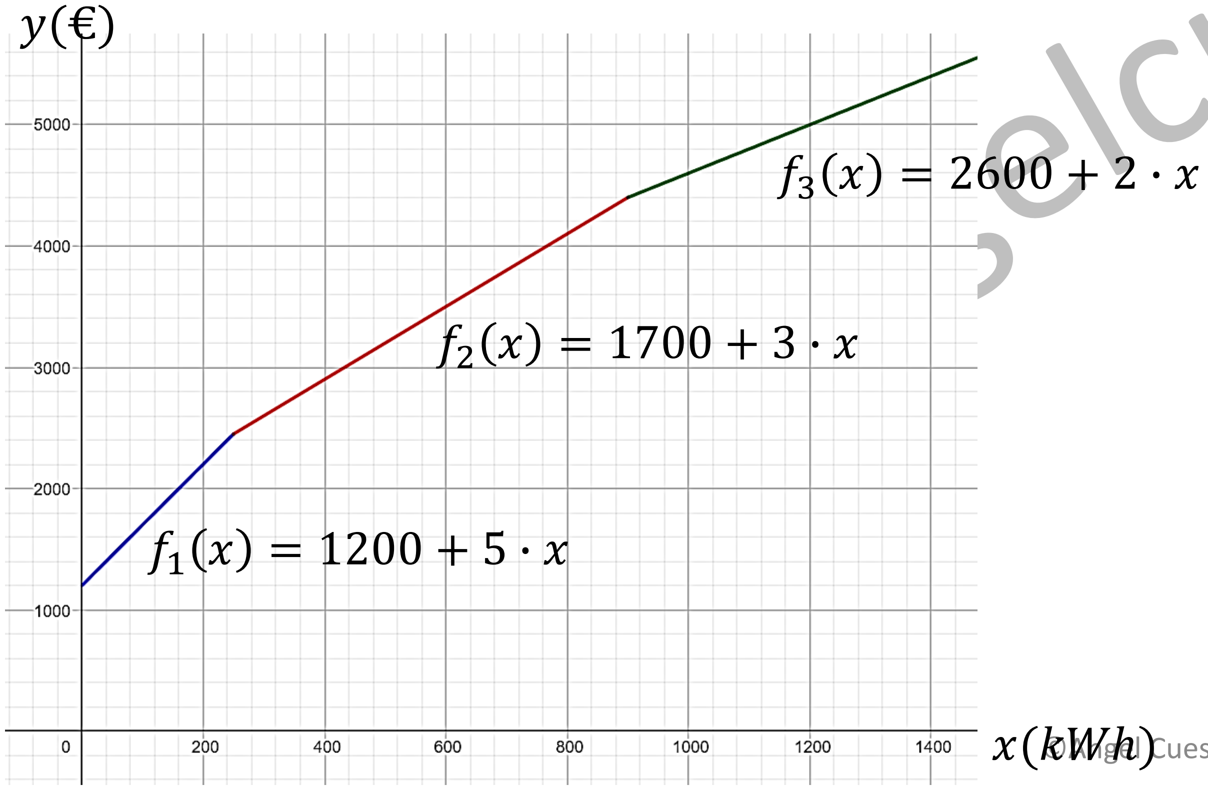
$(b) \quad f_2(x) = 1700 + 3 \cdot x$

x	y
250	2450
900	4400

$(c) \quad f_3(x) = 2600 + 2 \cdot x$

x	y
900	4400
1200	5000

Se representa gráficamente la función.



Problema 4

c) Otra pequeña empresa, con la misma cuota fija, paga todos los kWh a 3 euros. ¿Puede ocurrir que en un mes las dos empresas consuman lo mismo y además sus recibos coincidan? En caso afirmativo indica cuál será en ese mes el consumo y el importe del recibo de ambas empresas.

En este caso, la función que define el coste que paga esta segunda empresa es: $g(x) = 1200 + 3x$

Igualamos ambas funciones para calcular los consumos de energía eléctrica que provocan que sus facturas sean iguales. Como f(x) es una función es una función a trozos, se iguala a g(x) cada uno de los trozos.

Igualamos con el primer trozo. $1200 + 5x = 1200 + 3x \longrightarrow x = 0$

$$\boxed{\text{Si ambas empresas } \textbf{no consumen electricidad}\text{, pagan lo mismo. La cuota fija, 1200 €.}}$$

Igualamos con el segundo trozo. $1700 + 3x = 1200 + 3x \longrightarrow 1700 = 1200 \longrightarrow \textit{No tiene solución}$

Igualamos con el tercer trozo. $2600 + 2x = 1200 + 3x \longrightarrow x = 1400$

$$\boxed{\text{Si ambas empresas } \textbf{consumen 1400 kWh}\text{, pagan lo mismo.}}$$

Calculo el gasto sustituyendo en una de las dos funciones.

$g(1400) = 1200 + 3 \cdot 1400 = 5400$ € $\boxed{\text{Ambas empresas } \textbf{pagarán 5400 €}.}$

Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS
Junio 2023

Problema 5
Probabilidad

Problema 5

Arsenio Lupin ha descubierto que la alarma del Banco de París no se puede desconectar. No obstante, ha averiguado que la probabilidad de que la alarma suene cuando hay un motivo justificado es 0,95 y que la probabilidad de que suene injustificadamente es 0,3. El 31 de diciembre hay una probabilidad de 0,1 de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París y se sabe que nadie más lo atracará ese día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París ese día y que no suene la alarma?

b) Si ese día suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin no esté atracando el Banco de París?

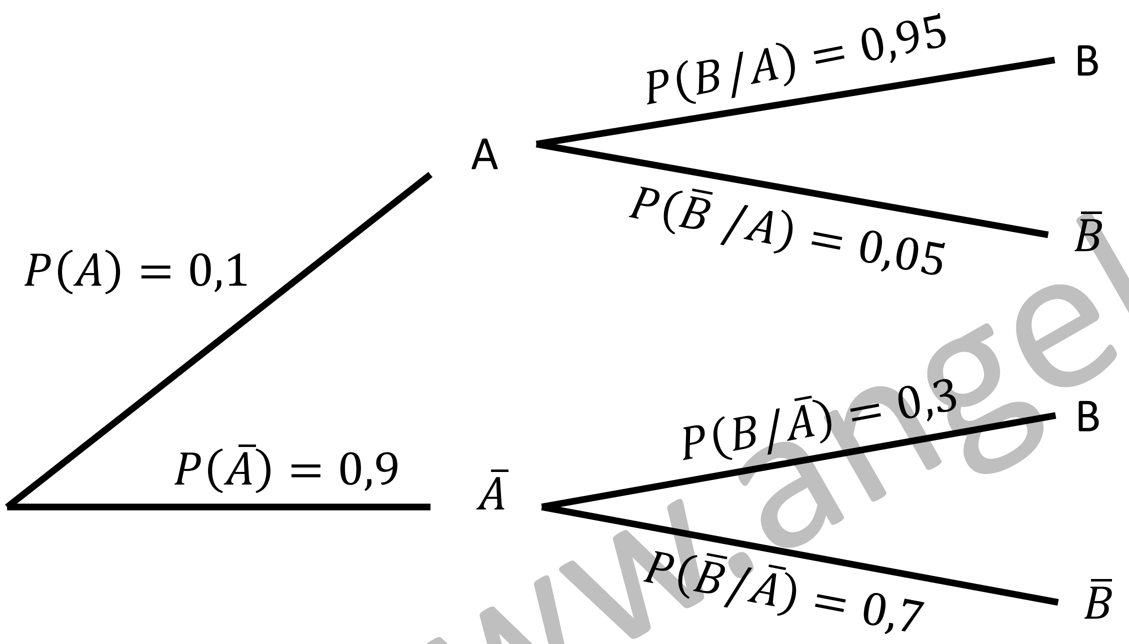
c) Si la alarma no ha sonado ese día, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin haya atracado el Banco de París?

Problema 5

Primero asignamos una letra a cada suceso.

A = Lupin atraca el banco $\bar{A}$ = Lupin NO atraca el banco   **B** = Suena la alarma $\bar{B}$ = NO suena la alarma

A partir del enunciado se representan todas las posibilidades mediante un diagrama de árbol.



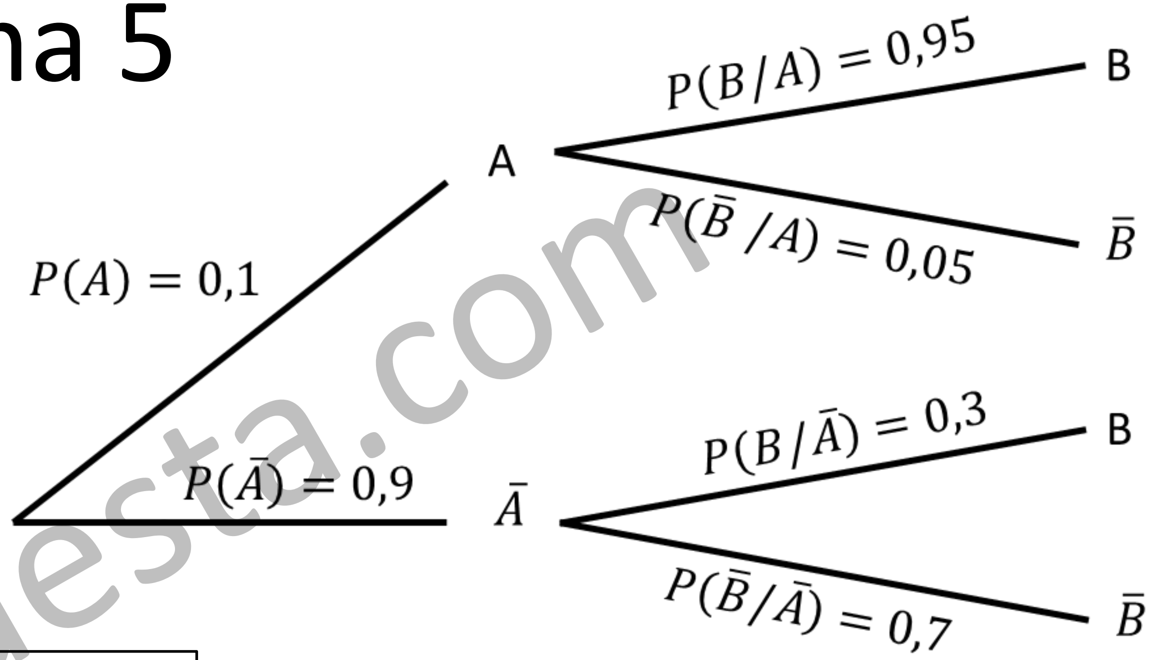
a) ¿Cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París ese día y que no suene la alarma?

Nos piden la probabilidad de la intersección.

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}/A) = 0{,}1 \cdot 0{,}05 = \mathbf{0{,}005}$$

La probabilidad de que Arsenio Lupin atraque el banco y no suene la alarma es **0,005.**

Problema 5



b) Si ese día suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin no esté atracando el Banco de París?

Nos piden una probabilidad condicionada a posteriori, por ello utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\overline{A}) \cdot P(B/\overline{A})}{P(A) \cdot P(B/A) + P(\overline{A}) \cdot P(B/\overline{A})}$$

$$P(\overline{A}/B) = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}3}{0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}3} = \mathbf{0{,}7397}$$

La probabilidad es **0,7397**.

c) Si la alarma no ha sonado ese día, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin haya atracado el Banco de París?

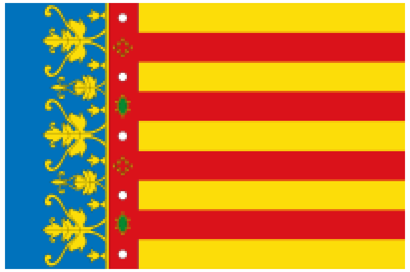
Nos piden una probabilidad condicionada a posteriori, por ello utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) \cdot P(\overline{B}/A)}{P(A) \cdot P(\overline{B}/A) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}/\overline{A})}$$

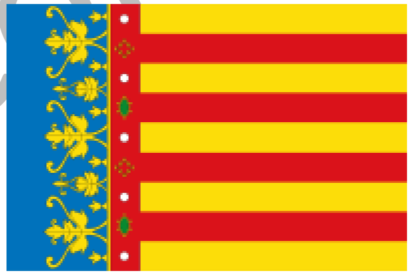
$$P(A/\overline{B}) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}05}{0{,}1 \cdot 0{,}05 + 0{,}9 \cdot 0{,}7} = \mathbf{0{,}0079}$$

La probabilidad es **0,0079**.

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS
Junio 2023



Problema 6
Probabilidad

Problema 6

Se sabe que el 60% de los clientes de una agencia de viajes realiza un viaje al año, el 30% realiza dos viajes al año, y el 10% restante realiza tres o más viajes al año. Se sabe también que hay un 54% de clientes que están casados y realizan un viaje al año, que hay un 14% de clientes que están casados y realizan dos viajes al año, y que hay un 2% de clientes que están casados y realizan tres o más viajes al año. Seleccionamos al azar un cliente de la agencia.

a) Si sabemos que el cliente seleccionado realiza dos o más viajes al año, ¿cuál es la probabilidad de que no esté casado?

b) Llamemos G al suceso "el cliente seleccionado no está casado" y H al suceso "el cliente seleccionado realiza menos de tres viajes al año". Calcula $P(G \cup H)$.

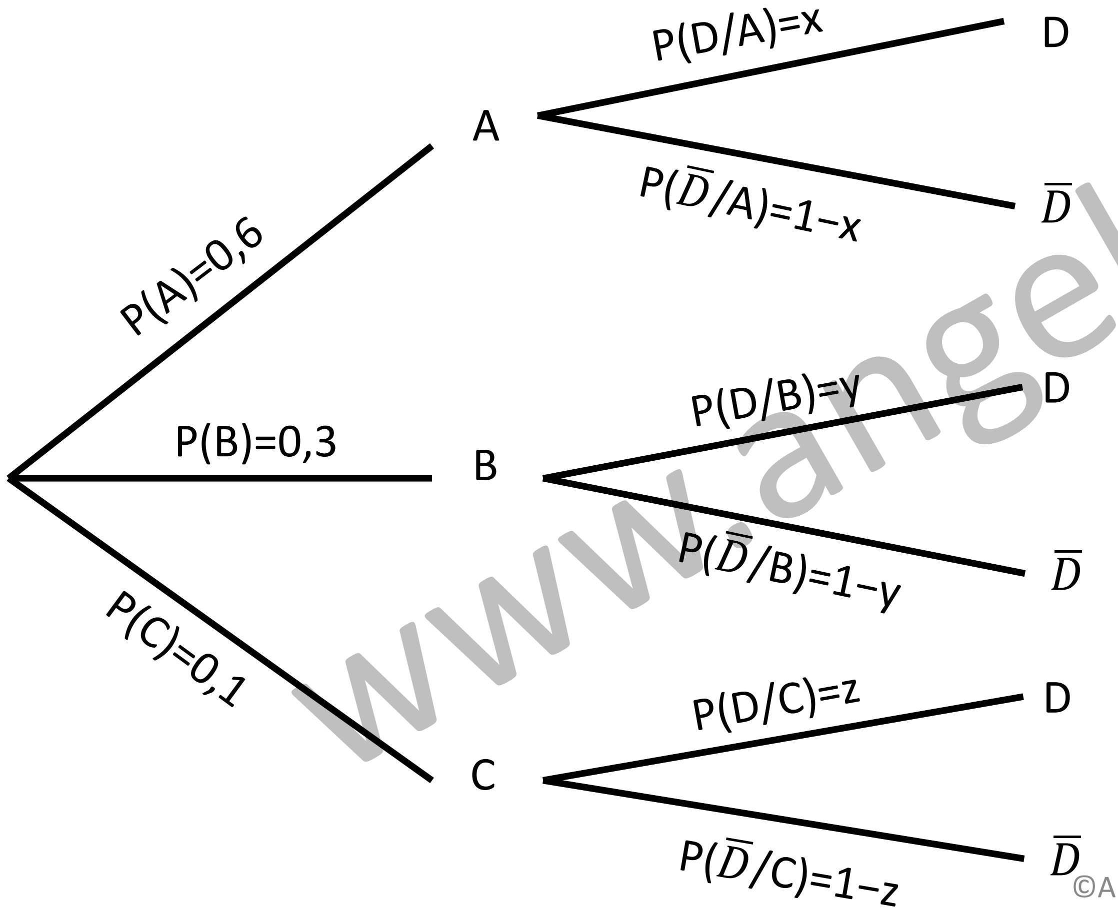
c) Llamemos J al suceso "el cliente seleccionado está casado" y K al suceso "el cliente seleccionado no realiza dos viajes al año". ¿Son J y K sucesos independientes?

Problema 6

Primero asignamos una letra a cada suceso.

A= 1 viaje al año. **B**= 2 viajes año. **C** =3 o más viajes al año. **D** =Casado $\overline{D}$ = No casado

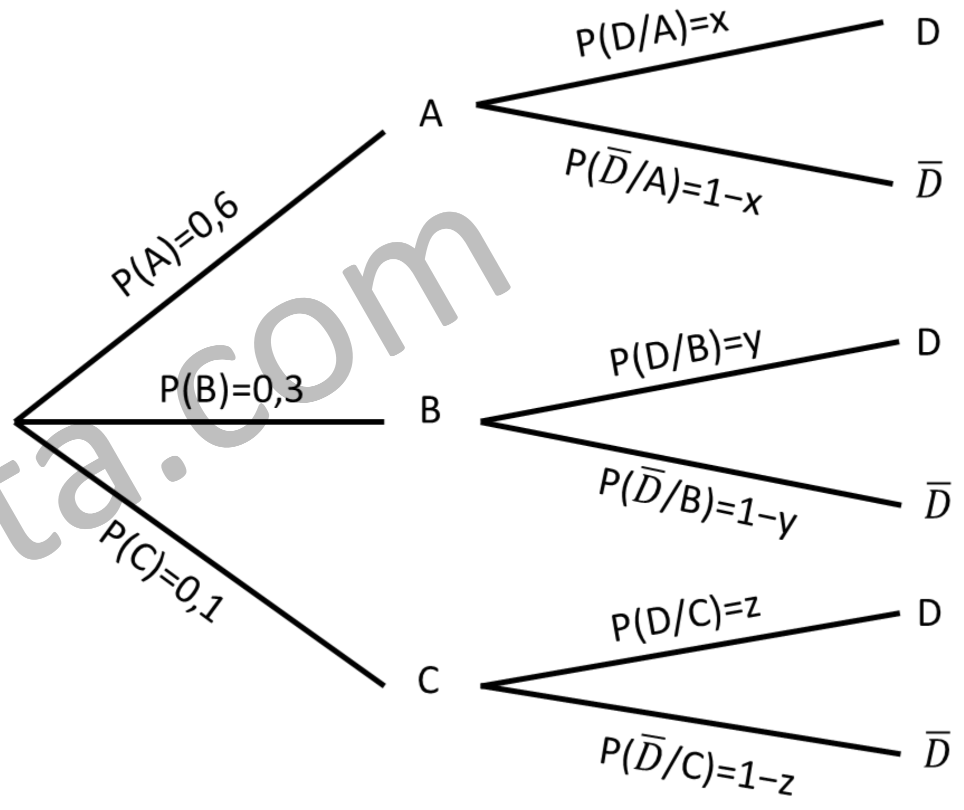
A partir del enunciado se representan todas las posibilidades mediante un diagrama de árbol.



En el enunciado nos dan datos de la intersección de los sucesos número de viajes al año y estado civil.

A partir de esos datos, calculo las probabilidades condicionadas que nos faltan para completar el diagrama de árbol.

Problema 6



"hay un 54% de clientes que están casados y realizan un viaje al año,"

$$P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D/\mathrm{A}) \longrightarrow P(D/\mathrm{A}) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)}$$

$$x = \frac{0{,}54}{0{,}6} = 0{,}9$$

"un 14% de clientes que están casados y realizan dos viajes al año"

$$P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D/\mathrm{B}) \longrightarrow P(D/\mathrm{B}) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)}$$

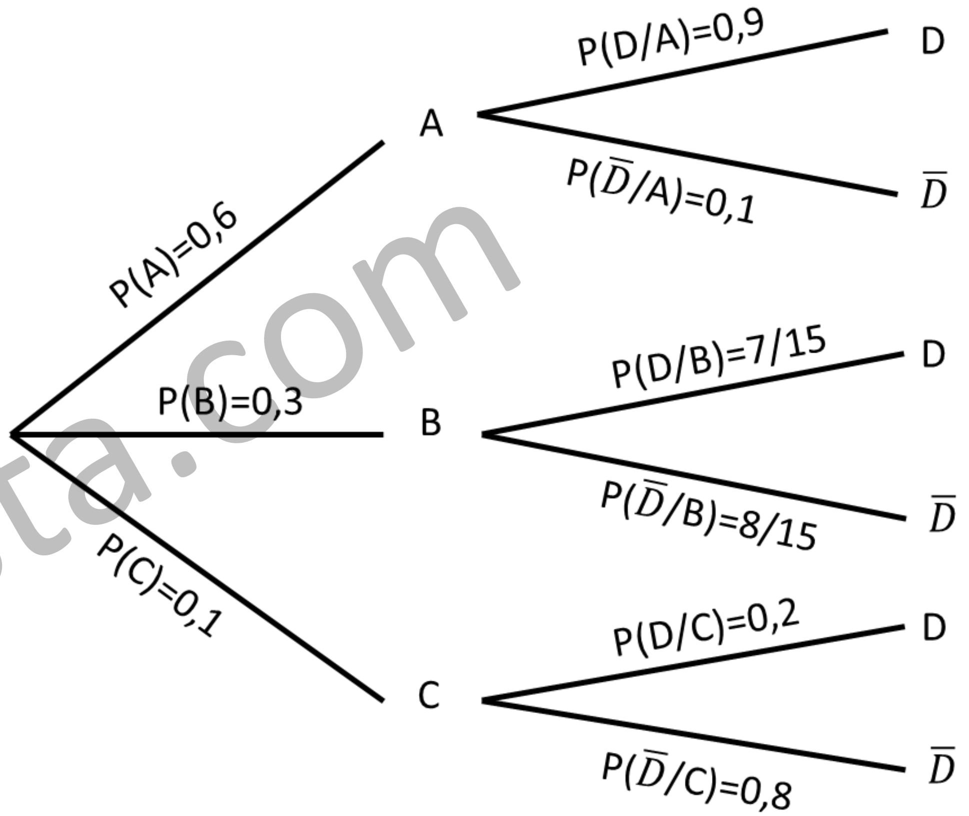
$$y = \frac{0{,}14}{0{,}30} = \frac{7}{15}$$

"hay un 2% de clientes que están casados y realizan tres o más viajes al año"

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D/\mathrm{C}) \longrightarrow P(D/\mathrm{C}) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)}$$

$$z = \frac{0{,}02}{0{,}10} = 0{,}2$$ Ya podemos completar el diagrama de árbol.

Problema 6



a) Si sabemos que el cliente seleccionado realiza dos o más viajes al año, ¿cuál es la probabilidad de que no esté casado?

Se expresa de forma algebraica la probabilidad pedida.

$$P\left(\overline{D}/_{(B\cup C)}\right)=\frac{P[\overline{D}\cap(B\cup C)]}{P(B\cup C)}=\frac{P[\overline{D}\cap B]}{P(B\cup C)}+\frac{P[\overline{D}\cap C]}{P(B\cup C)}$$

$$P\left(\overline{D}/_{(B\cup C)}\right)=\frac{P(B)\cdot P(\overline{D}/\mathrm{B})}{P(B)+P(C)}+\frac{P(C)\cdot P(\overline{D}/\mathrm{C})}{P(B)+P(C)}$$

Hemos tenido en cuenta que B y C son sucesos incompatibles, por eso:

$$P[\overline{D}\cap(B\cup C)]=P[\overline{D}\cap B]+P[\overline{D}\cap C] \qquad P(B\cup C)=P(B)+P(C)$$

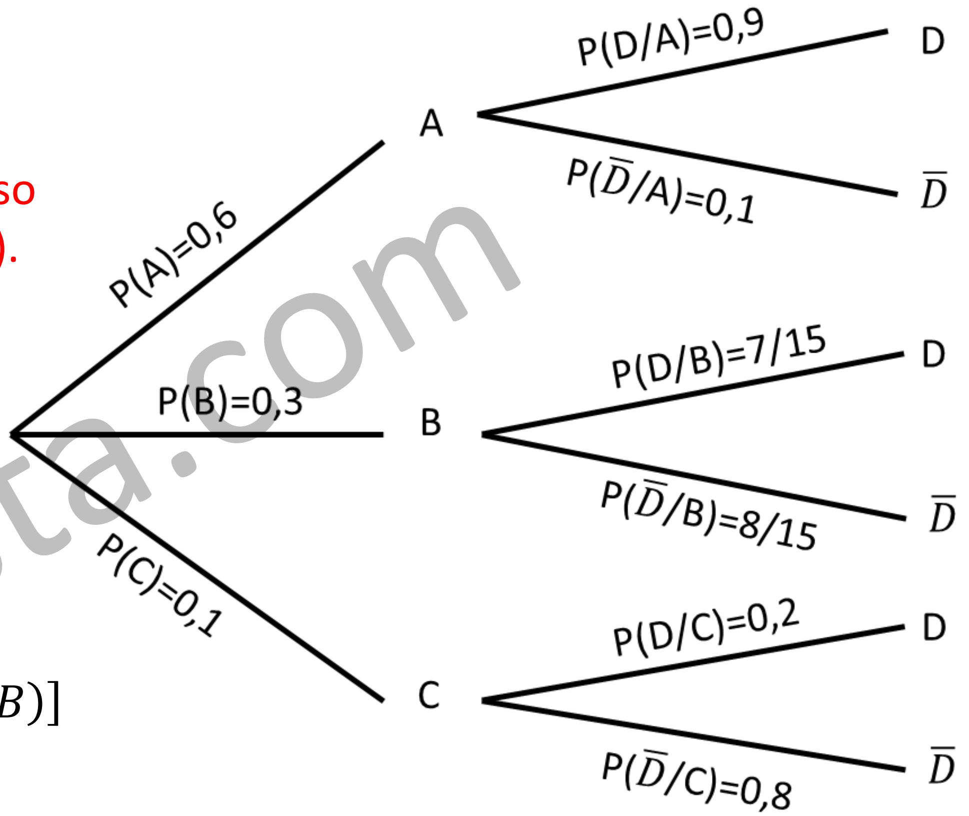
Se sustituyen las probabilidades. Puedes verlas en el diagrama de árbol.

$$P\left(\overline{D}/_{(B\cup C)}\right)=\frac{0{,}3\cdot 8/15}{0{,}3+0{,}1}+\frac{0{,}1\cdot 0{,}8}{0{,}3+0{,}1}=\mathbf{0,6}$$

La probabilidad de que no esté casado si realiza dos o más viajes al año es **0,6**.

Problema 6

b) Llamemos G al suceso "el cliente seleccionado no está casado" y H al suceso "el cliente seleccionado realiza menos de tres viajes al año". Calcula $P(G \cup H)$.



Relacionamos los sucesos H y G con los sucesos del diagrama de árbol.

$G \equiv \overline{D};\ No\ estar\ casado$

$H \equiv A \cup B; el\ cliente\ realiza\ menos\ de\ 3\ viajes$

Se expresa de forma algebraica la probabilidad pedida.

$$P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G \cap H) = P(\overline{D}) + P(A \cup B) - P[\overline{D} \cap (A \cup B)]$$

$$P(G \cup H) = P(\overline{D}) + P(A \cup B) - (P[\overline{D} \cap A] + P[\overline{D} \cap B])$$

$$P(G \cup H) = P(\overline{D}) + P(A) + P(B) - P[\overline{D} \cap A] - P[\overline{D} \cap B]$$

$$P(G \cup H) = P(\overline{D}) + P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(\overline{D}/\mathrm{A}) - P(B) \cdot P(\overline{D}/\mathrm{B})$$

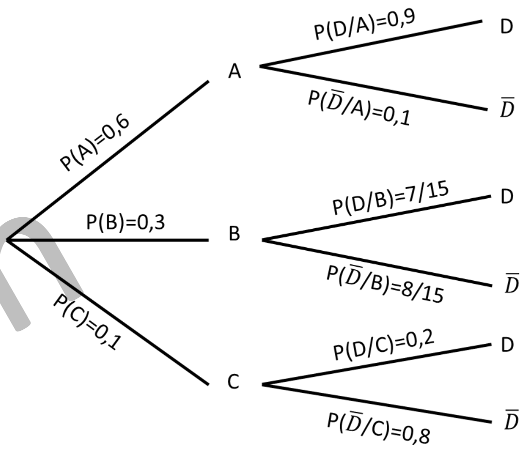
Hemos tenido en cuenta que A y B son sucesos incompatibles, por eso:

$$P[\overline{D} \cap (A \cup B)] = P[\overline{D} \cap A] + P[\overline{D} \cap B] \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Se debe aplicar el teorema de la probabilidad total para calcular $P(\overline{D})$

$$P(\overline{D}) = P(A) \cdot P(\overline{D}/A) + P(B) \cdot P(\overline{D}/\mathrm{B}) + P(C) \cdot P(\overline{D}/\mathrm{C})$$

Problema 6



b) Llamemos G al suceso "el cliente seleccionado no está casado" y H al suceso "el cliente seleccionado realiza menos de tres viajes al año". Calcula $P(G \cup H)$.

Se continúa con el cálculo de la probabilidad pedida.

$$P(G \cup H) = P(\overline{D}) + P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(\overline{D}/\mathrm{A}) - P(B) \cdot P(\overline{D}/\mathrm{B})$$

$$P(G \cup H) = \cancel{P(A) \cdot P(\overline{D}/A)} + \cancel{P(B) \cdot P(\overline{D}/\mathrm{B})} + P(C) \cdot P(\overline{D}/\mathrm{C}) + P(A) + P(B) - \cancel{P(A) \cdot P(\overline{D}/\mathrm{A})} - \cancel{P(B) \cdot P(\overline{D}/\mathrm{B})}$$

$$P(G \cup H) = P(C) \cdot P(\overline{D}/\mathrm{C}) + P(A) + P(B)$$

Se sustituyen las probabilidades. Puedes verlas en el diagrama de árbol.

$$P(G \cup H) = 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 + 0{,}3 = \mathbf{0{,}98}$$

La probabilidad pedida es **0,98.**

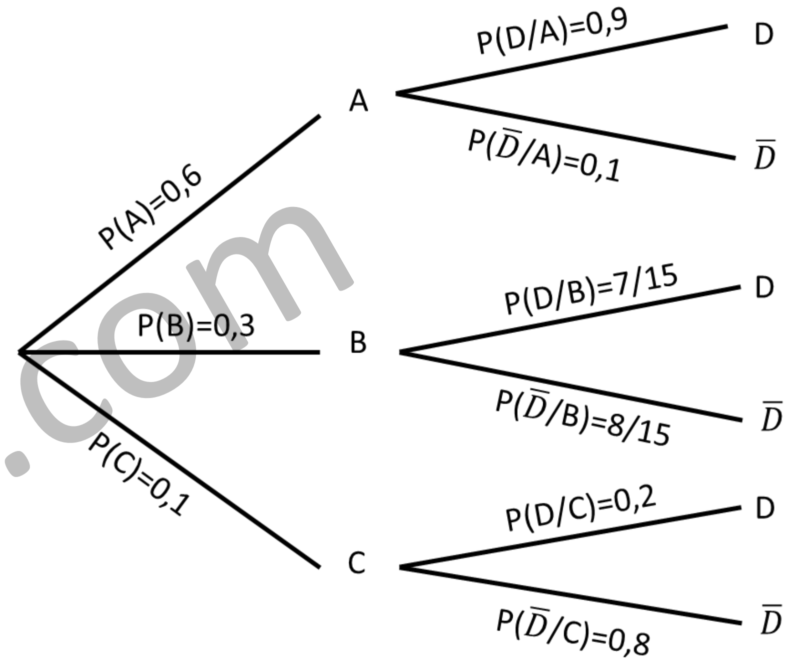
Una forma alternativa de hacer el ejercicio (y mucho más rápida) es darse cuenta de que la unión de los sucesos G y H es todo el espacio muestral excepto C∩D.

$$P(G \cup H) = 1 - P(C \cap D) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$$

La probabilidad pedida es **0,98.**

El proceso largo se ha hecho con fines pedagógicos y para demostrar que “más vale maña, que fuerza”.

Problema 6



c) Llamemos J al suceso "el cliente seleccionado está casado" y K al suceso "el cliente seleccionado no realiza dos viajes al año". ¿Son J y K sucesos independientes?

Relacionamos los sucesos J y K con los sucesos del diagrama de árbol.

$J \equiv D; Estar\ casado$

$K \equiv A \cup C; el\ cliente\ no\ realiza\ 2\ viajes\ al\ año$

Se calculan las probabilidades P(J), P(K) y P(J∩K).

Se debe aplicar el teorema de la probabilidad total para calcular $P(J) = P(D)$

$$P(J) = P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) = 0{,}6 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot \frac{7}{15} + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}7$$

$P(K) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) = 0{,}6 + 0{,}1 = 0{,}7$ Hemos tenido en cuenta que A y C son sucesos incompatibles.

$$P(J \cap K) = P\big(D \cap (A \cup C)\big) = P(D \cap A) + P(D \cap C) = 0{,}54 + 0{,}02 = 0{,}56$$

Comprobamos si se verifica la condición de independencia: $P(J \cap K) = P(J) \cdot P(K)$

Se comprueba que no se cumple ya que: $0{,}56 \neq 0{,}7 \cdot 0{,}7$

Los sucesos J y K **NO son independientes.**