

PAU Comunidad Valenciana



MATEMÁTICAS CCSS



Junio 2024

Problema 2

Álgebra matricial

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



PAU JULIO 2023



PAU JUNIO 2023



Problema 2

Consideremos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide:

- a) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1} A + A = B$.
- b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A - B) Y - A Y = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3.
- c) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $A Z A^{-1} = I$.

Solución:

Se despeja la ecuación matricial. $X^{-1} \cdot A + A = B \longrightarrow X^{-1} \cdot A = B - A \longrightarrow X^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} = (B - A) \cdot A^{-1}$

$$X^{-1} = B \cdot A^{-1} - A \cdot A^{-1} \longrightarrow X^{-1} = B \cdot A^{-1} - I \longrightarrow (X^{-1})^{-1} = (B \cdot A^{-1} - I)^{-1} \longrightarrow X = (B \cdot A^{-1} - I)^{-1}$$

Se debe calcular en primer lugar la matriz inversa de A . En este caso y dado que es muy parecida a la matriz identidad, vale la pena utilizar el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F'_1 = F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1} A + A = B$.

$X = (B \cdot A^{-1} - I)^{-1}$ Se calcula a continuación, $B \cdot A^{-1} - I$

$$B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A^{-1} - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último, se calcula la matriz inversa para calcular X : $X = (B \cdot A^{-1} - I)^{-1}$

Problema 2

Calcula la matriz inversa de $E = B \cdot A^{-1} - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mediante el método de los adjuntos. $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculo $|E|$; $|E| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Al ser el determinante distinto de cero, la matriz E **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(E) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(E))^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $E^{-1} = \frac{1}{|E|} \cdot (Adj(E))^t \longrightarrow E^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = X$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2

Consideremos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A - B)Y - AY = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3.

Se extrae factor común Y . $(A - B - A) \cdot Y = I \rightarrow -B \cdot Y = I \rightarrow (-B)^{-1} \cdot (-B) \cdot Y = (-B)^{-1} \cdot I \rightarrow Y = (-B)^{-1}$

Se calcula la matriz inversa de $-B$, de nuevo por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F'_3 = F_3 - F_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F'_3 = F_3 + F_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F'_2 = 2F_2 - F_3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F'_1 = 2F_1 - F_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se divide entre (-2) cada una de las filas para obtener la matriz inversa.

Problema 2

Consideremos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A - B)Y - AY = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3.

$$Y = (-B)^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Se divide entre } (-2) \text{ cada una de las filas.}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Problema 2

Consideremos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $A Z A^{-1} = I$.

Se despeja la ecuación matricial. $A^{-1} \cdot A Z A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot I \cdot A \longrightarrow I \cdot Z \cdot I = A^{-1} \cdot I \cdot A \longrightarrow Z = A^{-1} \cdot A = I$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$