

PAU Comunidad Valenciana



MATEMÁTICAS CCSS



Junio 2024

Problema 3

Análisis de funciones

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Representación de 8 funciones racionales. Paso a paso



Problema 3

Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x \cdot (x - 3) + x + 1}$. Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) Los máximos y mínimos locales, si existen.
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución: Antes de comenzar a trabajar con la función, se debe operar el denominador.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x \cdot (x - 3) + x + 1} = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 3x + x + 1} = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2}$$

Importante darse cuenta de que el denominador es una identidad notable.

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $(x - 1)^2 = 0 \longrightarrow x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$

Por ello, el Dominio es:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Para calcular los puntos de corte con los ejes: Eje Y ($x = 0$) $\rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 3 \cdot 0}{(0 - 1)^2} = 0 \rightarrow A = (0, 0)$

$$\text{Eje X } (y = 0) \rightarrow \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \rightarrow x \cdot (x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$A = (0, 0)$$

$$B = (3, 0)$$

Problema 3

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en el valor de x que está fuera del dominio. En dicho valor, es posible que haya una asíntota vertical.

Calculo el límite de la función en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{0} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = 1 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función en el último apartado.

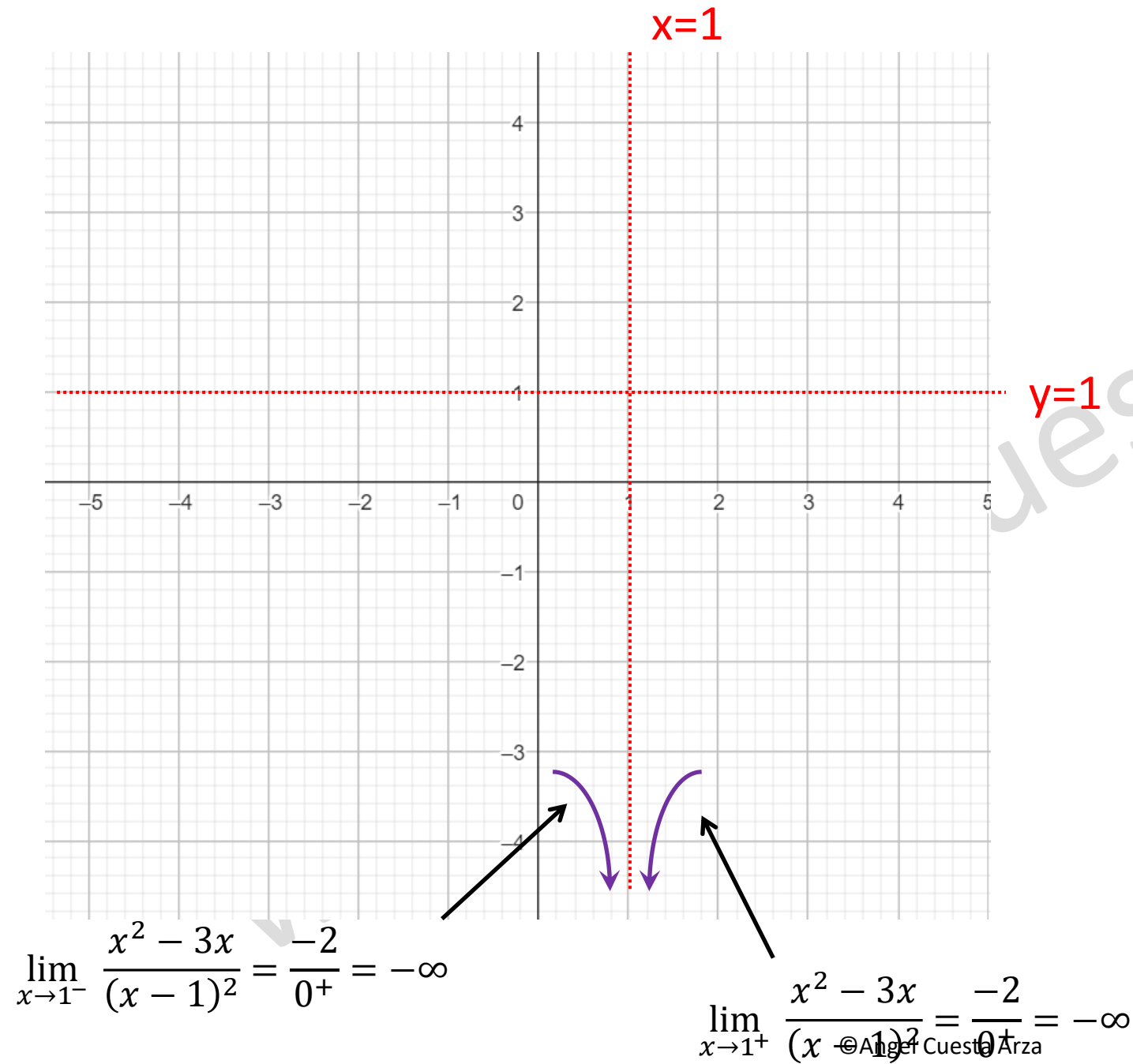
La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$\text{por lo tanto, } y = 1 \text{ es A.H. de } f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.



Problema 3

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2}$$

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{(2x - 3) \cdot (x - 1)^2 - (x^2 - 3x) \cdot 2 \cdot (x - 1)}{(x - 1)^4} = \frac{(x - 1) \cdot [(2x - 3) \cdot (x - 1) - 2 \cdot (x^2 - 3x)]}{(x - 1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 3) \cdot (x - 1) - 2 \cdot (x^2 - 3x)}{(x - 1)^3} = \frac{2x^2 - 2x - 3x + 3 - 2x^2 + 6x}{(x - 1)^3} = \frac{x + 3}{(x - 1)^3}$$

Igualamos la derivada a cero: $\frac{x + 3}{(x - 1)^3} = 0 \longrightarrow x + 3 = 0 \longrightarrow x = -3$

Se estudia el signo de la derivada:

	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$				

$f(x)$ es **creciente** en $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ y **decreciente** en $x \in (-3, 1)$

Problema 3

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$				

Se observa en el cuadro que la función tiene un máximo relativo en $x=-3$. En $x=1$, no hay extremo relativo, pues no pertenece al dominio de definición.

Se sustituye ese valor en la función para obtener las coordenadas del máximo relativo.

$$f(-3) = \frac{(-3)^2 - 3 \cdot (-3)}{(-3 - 1)^2} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

Las coordenadas del máximo relativo son:

$$C = \left(-3, \frac{9}{8}\right)$$

