

PAU Comunidad Valenciana



MATEMÁTICAS CCSS



Junio 2024

Problema 4

Análisis de funciones

Problema 4

Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x & \text{si } x \leq -1, \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1. \end{cases}$ siendo a un número real.

- a) Determina el valor de a para que esta función sea continua.
- b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo $] -9/2, -3/2[$.
- c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX .

Problema 4

Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x & \text{si } x \leq -1, \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1. \end{cases}$ siendo a un número real.

a) Determina el valor de a para que esta función sea continua.

Solución: Se estudia la continuidad de $f(x)$ en $x = -1$ ya que en el resto del dominio la función es continua. Para que la función sea continua, los límites laterales en $x = -1$ deben ser iguales y coincidir con el valor de la imagen de la función para dicho valor.

$$f(-1) = (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + 24 \cdot (-1) = a - 25$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} x^3 + ax^2 + 24x = -1 + a - 24 = a - 25 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-1)^2 + 3 = (-1-1)^2 + 3 = 7 \end{aligned} \right\} \longrightarrow a - 25 = 7 \longrightarrow a = 32$$

Para que la función sea continua $a = 32$, ya que en ese caso $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$.

Problema 4

b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo $] - 9/2, -3/2[$.

Se escribe la función $f(x)$ para $a = 9$.
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 9x^2 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x - 1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

En el intervalo de trabajo dado: $f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x$

Se calcula la derivada de la función y se iguala a cero para determinar los extremos relativos de la función.

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 24 \longrightarrow 3x^2 + 18x + 24 = 0 \longrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases}$$

Puesto que ambas soluciones pertenecen al intervalo de trabajo, dichos valores serán extremos relativos de $f(x)$.

Se utiliza el criterio de la segunda derivada para establecer su naturaleza. $f''(x) = 6x + 18$

$$f''(-4) = 6 \cdot (-4) + 18 = -6 < 0 \quad \text{En } x = -4 \text{ hay un máximo relativo.}$$

$$f''(-2) = 6 \cdot (-2) + 18 = 6 > 0 \quad \text{En } x = -2 \text{ hay un mínimo relativo.}$$

Se calcula el máximo y el mínimo local de la función.

$$f(-4) = (-4)^3 + 9 \cdot (-4)^2 + 24 \cdot (-4) = -16$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 9 \cdot (-2)^2 + 24 \cdot (-2) = -20$$

Máximo local **$(-4, -16)$**

Mínimo local **$(-2, -20)$**

Problema 4

Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x & \text{si } x \leq -1, \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1. \end{cases}$ siendo a un número real.

c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX .

El valor de a es irrelevante en este apartado, ya que el área que nos piden está definida por el segundo trozo de la función. Esta función es positiva en el intervalo de integración, por lo que el área se puede calcular directamente con la integral de la función entre $x = 2$ y $x = 3$.

$$\int_2^3 [(x-1)^2 + 3] dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} + 3x \right]_2^3 = \frac{(3-1)^3}{3} + 3 \cdot 3 - \left[\frac{(2-1)^3}{3} + 3 \cdot 2 \right] = \frac{8}{3} + 9 - \frac{1}{3} - 6 = \frac{16}{3}$$

El área bajo la curva entre $x = 2$, $x = 3$ y el eje OX es **$16/3$ unidades de área.**