

PAU Comunidad Valenciana



MATEMÁTICAS
CCSS



Junio 2024

Problema 1

Problema de sistemas de ecuaciones

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



PAU Julio 2021



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



PROBLEMA 1

Una tienda de televisores ha obtenido 247 250 euros por la venta de 220 televisores de sus modelos ULED, QLED y LD. Un televisor del modelo ULED cuesta 1 250 euros y los otros dos modelos son un 10 % y un 20 % más baratos que el modelo ULED, respectivamente. Sabemos que la suma de la cantidad de televisores QLED y de televisores LD vendidos es igual al triple de los televisores ULED vendidos. Halla el número de televisores de cada modelo que se han vendido.

Solución: En primer lugar, se definen las incógnitas del problema.

x = número de televisores ULED
y = número de televisores QLED
z = número de televisores LD

Se traduce del español al lenguaje algebraico:

“...por la venta de 220 televisores de sus modelos ULED, QLED y LD.” $\longrightarrow x + y + z = 220$

“Un televisor del modelo ULED cuesta 1 250 euros y los otros dos modelos son un 10 % y un 20 % más baratos que el modelo ULED, respectivamente” $\longrightarrow \begin{cases} \text{Coste TV QLED} = 0,9 \cdot 1250 = 1125 \text{ €} \\ \text{Coste TV LD} = 0,8 \cdot 1250 = 1000 \text{ €} \end{cases}$

“Una tienda de televisores ha obtenido 247 250 euros” $\longrightarrow 1250x + 1125y + 1000z = 247250$

“la suma de la cantidad de televisores QLED y de televisores LD vendidos es igual al triple de los televisores ULED vendidos” $\longrightarrow y + z = 3 \cdot x \longrightarrow -3x + y + z = 0$

PROBLEMA 1

Quedando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 220 \\ 1250x + 1125y + 1000z = 247250 \\ -3x + y + z = 0 \end{cases}$$

Resolveré el sistema utilizando la regla de Cramer. Los números grandes me dificultan hacer el método de Gauss. Pero si te esperas al final, te cuento un truco para hacer el ejercicio más rápido.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 220 & 1 & 1 \\ 247250 & 1125 & 1000 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1250 & 1125 & 1000 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{27500}{500} = 55$$
$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 220 & 1 \\ 1250 & 247250 & 1000 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1250 & 1125 & 1000 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{54000}{500} = 108$$
$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 220 \\ 1250 & 1125 & 247250 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1250 & 1125 & 1000 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{28500}{500} = 57$$

Solución: Se vendieron **55 televisores ULED**, **108 televisores QLED** y **57 televisores LD**.

BONUS

Fíjate en la primera y en la tercera ecuación:

$$\begin{cases} x + y + z = 220 \\ 1250x + 1125y + 1000z = 247250 \\ -3x + y + z = 0 \end{cases}$$

Si restas ambas ecuaciones, puedes obtener fácilmente el valor de la incógnita x .

$$\text{Ec1: } x + y + z = 220$$

$$\text{Ec3: } -3x + y + z = 0$$

$$4x = 220 \longrightarrow x = \frac{220}{4} = 55$$

Se sustituye este valor en las dos primeras ecuaciones y ya tienes un sistema de sólo 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

$$\begin{cases} 55 + y + z = 220 \\ 1250 \cdot 55 + 1125y + 1000z = 247250 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y + z = 165 \\ 1125y + 1000z = 178500 \end{cases}$$

Si estás en segundo de bachillerato te recomiendo que lo resuelvas utilizando el método de Gauss o la regla de Cramer. En caso de estar en otro nivel, puedes hacerlo como quieras. Resuelvo a continuación.

BONUS

$$\begin{cases} y + z = 165 \\ 1125y + 1000z = 178500 \end{cases}$$

Resolveré el sistema utilizando la regla de Cramer.

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 165 & 1 \\ 178500 & 1000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1125 & 1000 \end{vmatrix}} = \frac{-13500}{-125} = 108 \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 165 \\ 1125 & 178500 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1125 & 1000 \end{vmatrix}} = \frac{-7125}{-125} = 57$$

Solución: Se vendieron **55 televisores ULED**, **108 televisores QLED** y **57 televisores LD**.

PAU Comunidad Valenciana



MATEMÁTICAS CCSS



Junio 2024

Problema 2

Álgebra matricial

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



PAU JULIO 2023



PAU JUNIO 2023



Problema 2

Consideremos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide:

- a) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1} A + A = B$.
- b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A - B) Y - A Y = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3.
- c) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $A Z A^{-1} = I$.

Solución:

Se despeja la ecuación matricial. $X^{-1} \cdot A + A = B \longrightarrow X^{-1} \cdot A = B - A \longrightarrow X^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} = (B - A) \cdot A^{-1}$

$$X^{-1} = B \cdot A^{-1} - A \cdot A^{-1} \longrightarrow X^{-1} = B \cdot A^{-1} - I \longrightarrow (X^{-1})^{-1} = (B \cdot A^{-1} - I)^{-1} \longrightarrow X = (B \cdot A^{-1} - I)^{-1}$$

Se debe calcular en primer lugar la matriz inversa de A . En este caso y dado que es muy parecida a la matriz identidad, vale la pena utilizar el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F'_1 = F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1} A + A = B$.

$X = (B \cdot A^{-1} - I)^{-1}$ Se calcula a continuación, $B \cdot A^{-1} - I$

$$B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A^{-1} - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último, se calcula la matriz inversa para calcular X : $X = (B \cdot A^{-1} - I)^{-1}$

Problema 2

Calcula la matriz inversa de $E = B \cdot A^{-1} - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mediante el método de los adjuntos. $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculo $|E|$; $|E| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Al ser el determinante distinto de cero, la matriz E **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(E) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(E))^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $E^{-1} = \frac{1}{|E|} \cdot (Adj(E))^t \longrightarrow E^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = X$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2

Consideremos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A - B)Y - AY = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3.

Se extrae factor común Y . $(A - B - A) \cdot Y = I \rightarrow -B \cdot Y = I \rightarrow (-B)^{-1} \cdot (-B) \cdot Y = (-B)^{-1} \cdot I \rightarrow Y = (-B)^{-1}$

Se calcula la matriz inversa de $-B$, de nuevo por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F'_3 = F_3 - F_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F'_3 = F_3 + F_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F'_2 = 2F_2 - F_3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F'_1 = 2F_1 - F_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se divide entre (-2) cada una de las filas para obtener la matriz inversa.

Problema 2

Consideremos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A - B)Y - AY = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3.

$$Y = (-B)^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Se divide entre } (-2) \text{ cada una de las filas.}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Problema 2

Consideremos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $A Z A^{-1} = I$.

Se despeja la ecuación matricial. $A^{-1} \cdot A Z A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot I \cdot A \longrightarrow I \cdot Z \cdot I = A^{-1} \cdot I \cdot A \longrightarrow Z = A^{-1} \cdot A = I$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PAU Comunidad Valenciana



MATEMÁTICAS CCSS



Junio 2024

Problema 3

Análisis de funciones

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Representación de 8 funciones racionales. Paso a paso



Problema 3

Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x \cdot (x - 3) + x + 1}$. Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) Los máximos y mínimos locales, si existen.
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución: Antes de comenzar a trabajar con la función, se debe operar el denominador.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x \cdot (x - 3) + x + 1} = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 3x + x + 1} = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2}$$

Importante darse cuenta de que el denominador es una identidad notable.

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $(x - 1)^2 = 0 \longrightarrow x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$

Por ello, el Dominio es:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Para calcular los puntos de corte con los ejes: Eje Y ($x = 0$) $\rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 3 \cdot 0}{(0 - 1)^2} = 0 \rightarrow A = (0, 0)$

$$\text{Eje X } (y = 0) \rightarrow \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \rightarrow x \cdot (x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$A = (0, 0)$$

$$B = (3, 0)$$

Problema 3

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en el valor de x que está fuera del dominio. En dicho valor, es posible que haya una asíntota vertical.

Calculo el límite de la función en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{array} \right. , \text{luego } \boxed{x = 1 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función en el último apartado.

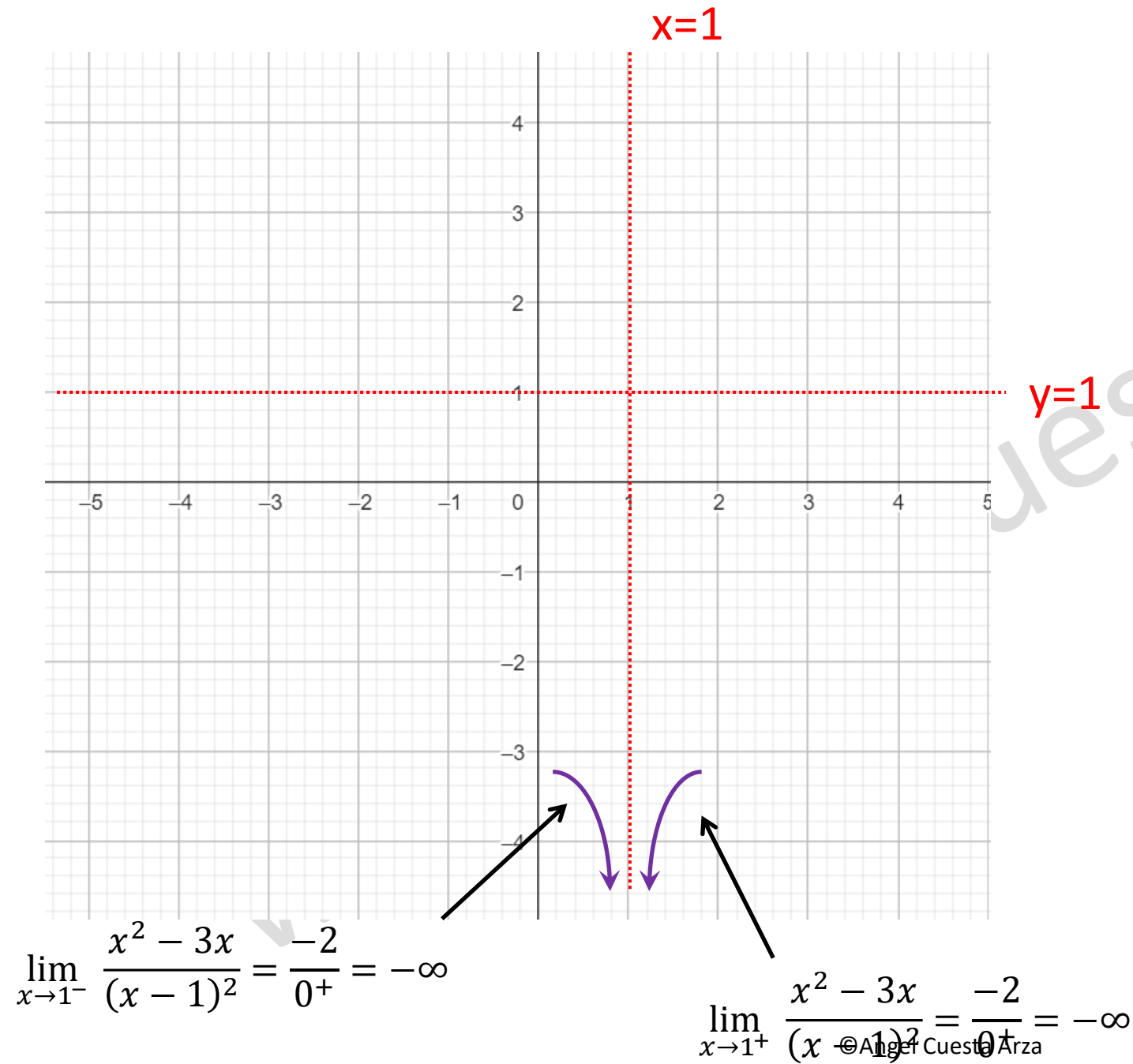
La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$\text{por lo tanto, } y = 1 \text{ es A.H. de } f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.



Problema 3

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2}$$

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{(2x - 3) \cdot (x - 1)^2 - (x^2 - 3x) \cdot 2 \cdot (x - 1)}{(x - 1)^4} = \frac{(x - 1) \cdot [(2x - 3) \cdot (x - 1) - 2 \cdot (x^2 - 3x)]}{(x - 1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 3) \cdot (x - 1) - 2 \cdot (x^2 - 3x)}{(x - 1)^3} = \frac{2x^2 - 2x - 3x + 3 - 2x^2 + 6x}{(x - 1)^3} = \frac{x + 3}{(x - 1)^3}$$

Igualamos la derivada a cero: $\frac{x + 3}{(x - 1)^3} = 0 \longrightarrow x + 3 = 0 \longrightarrow x = -3$

Se estudia el signo de la derivada:

	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$				

$f(x)$ es **creciente** en $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ y **decreciente** en $x \in (-3, 1)$

Problema 3

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$				

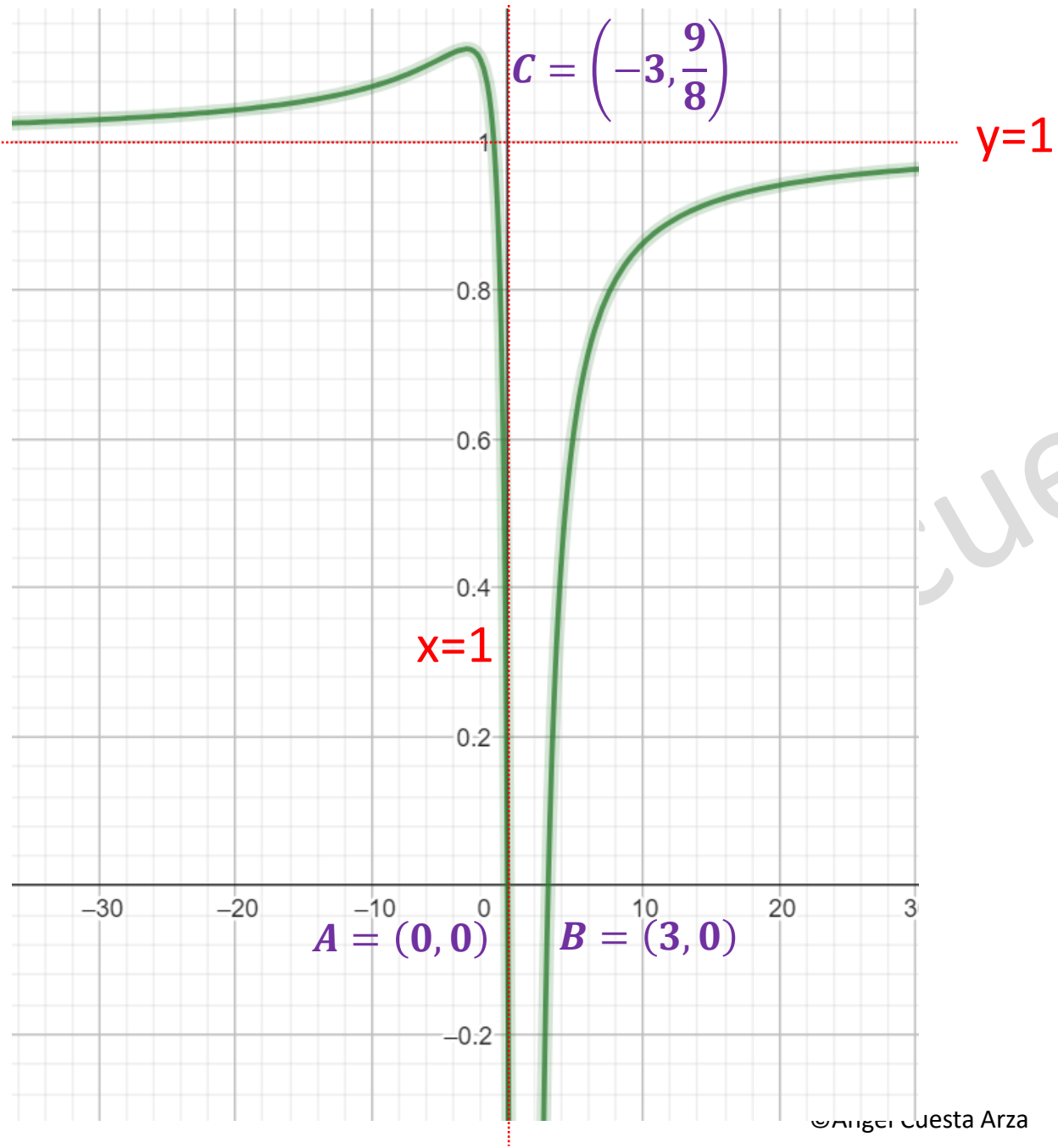
Se observa en el cuadro que la función tiene un máximo relativo en $x=-3$. En $x=1$, no hay extremo relativo, pues no pertenece al dominio de definición.

Se sustituye ese valor en la función para obtener las coordenadas del máximo relativo.

$$f(-3) = \frac{(-3)^2 - 3 \cdot (-3)}{(-3 - 1)^2} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

Las coordenadas del máximo relativo son:

$$C = \left(-3, \frac{9}{8}\right)$$



PAU Comunidad Valenciana



MATEMÁTICAS CCSS



Junio 2024

Problema 4

Análisis de funciones

Problema 4

Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x & \text{si } x \leq -1, \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1. \end{cases}$ siendo a un número real.

- a) Determina el valor de a para que esta función sea continua.
- b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo $] -9/2, -3/2[$.
- c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX .

Problema 4

Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x & \text{si } x \leq -1, \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1. \end{cases}$ siendo a un número real.

a) Determina el valor de a para que esta función sea continua.

Solución: Se estudia la continuidad de $f(x)$ en $x = -1$ ya que en el resto del dominio la función es continua. Para que la función sea continua, los límites laterales en $x = -1$ deben ser iguales y coincidir con el valor de la imagen de la función para dicho valor.

$$f(-1) = (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + 24 \cdot (-1) = a - 25$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} x^3 + ax^2 + 24x = -1 + a - 24 = a - 25 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-1)^2 + 3 = (-1-1)^2 + 3 = 7 \end{aligned} \right\} \longrightarrow a - 25 = 7 \longrightarrow a = 32$$

Para que la función sea continua $a = 32$, ya que en ese caso $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$.

Problema 4

b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo $] - 9/2, -3/2[$.

Se escribe la función $f(x)$ para $a = 9$.
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 9x^2 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x - 1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

En el intervalo de trabajo dado: $f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x$

Se calcula la derivada de la función y se iguala a cero para determinar los extremos relativos de la función.

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 24 \longrightarrow 3x^2 + 18x + 24 = 0 \longrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases}$$

Puesto que ambas soluciones pertenecen al intervalo de trabajo, dichos valores serán extremos relativos de $f(x)$.

Se utiliza el criterio de la segunda derivada para establecer su naturaleza. $f''(x) = 6x + 18$

$$f''(-4) = 6 \cdot (-4) + 18 = -6 < 0 \quad \text{En } x = -4 \text{ hay un máximo relativo.}$$

$$f''(-2) = 6 \cdot (-2) + 18 = 6 > 0 \quad \text{En } x = -2 \text{ hay un mínimo relativo.}$$

Se calcula el máximo y el mínimo local de la función.

$$f(-4) = (-4)^3 + 9 \cdot (-4)^2 + 24 \cdot (-4) = -16$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 9 \cdot (-2)^2 + 24 \cdot (-2) = -20$$

Máximo local **$(-4, -16)$**

Mínimo local **$(-2, -20)$**

Problema 4

Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x & \text{si } x \leq -1, \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1. \end{cases}$ siendo a un número real.

c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX .

El valor de a es irrelevante en este apartado, ya que el área que nos piden está definida por el segundo trozo de la función. Esta función es positiva en el intervalo de integración, por lo que el área se puede calcular directamente con la integral de la función entre $x = 2$ y $x = 3$.

$$\int_2^3 [(x-1)^2 + 3] dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} + 3x \right]_2^3 = \frac{(3-1)^3}{3} + 3 \cdot 3 - \left[\frac{(2-1)^3}{3} + 3 \cdot 2 \right] = \frac{8}{3} + 9 - \frac{1}{3} - 6 = \frac{16}{3}$$

El área bajo la curva entre $x = 2$, $x = 3$ y el eje OX es **$16/3$ unidades de área.**

PAU Comunidad Valenciana



MATEMÁTICAS CCSS



Junio 2024

Problema 5
Probabilidad

PREPÁRATE BIEN

Si no has trabajado nunca con probabilidad, te recomiendo que veas y trabajes con mi curso de probabilidad básica y con los dos cursos de probabilidad más avanzados, donde explico el álgebra de conjuntos y los teoremas fundamentales de la probabilidad, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Te dejo los códigos QR y los enlace para que puedas acceder al vídeo correspondiente.



Teoría y ejercicios de probabilidad.

<https://youtu.be/1Dvh2QpL2pw>



Álgebra de conjuntos

https://youtu.be/Pu_6f73w3o8



Teoremas

<https://youtu.be/KS6VfQgGOCA>

Problema 5

Un 30 % de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán. En dicha empresa, el 40 % de los directivos sabe inglés. Además, de los directivos que saben alemán, el 40 % sabe también inglés. Seleccionamos un directivo al azar.

- a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán?
- b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés?
- c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

Solución: Primero asignamos una letra a cada suceso. I = el directivo habla inglés $\bar{I}$ = el directivo NO habla inglés
 A = el directivo habla alemán $\bar{A}$ = El directivo NO habla alemán

En segundo lugar, tomamos datos del enunciado.

“Un 30 % de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán.” $P(I \cap A) = 0,3$

“el 40 % de los directivos sabe inglés” $P(I) = 0,4$

“de los directivos que saben alemán, el 40 % sabe también inglés” $P(I/A) = 0,4$

Problema 5

a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán? $P(I \cap A) = 0,3$ $P(I) = 0,4$ $P(I/A) = 0,4$

Se aplica la definición de la probabilidad condicionada.

$$P(I/A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} \longrightarrow P(A) = \frac{P(I \cap A)}{P(I/A)} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$$

La probabilidad de que un directivo sepa alemán es **0,75**.

b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés?

Se aplica la ley de la diferencia $P(A \cap \bar{I}) = P(A) - P(A \cap I) = 0,75 - 0,3 = 0,45$

La probabilidad de que el directivo sepa alemán y no inglés es **0,45**.

c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

Se aplica la definición de la probabilidad condicionada, una vez más.

$$P(I/\bar{A}) = \frac{P(I \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(I) - P(I \cap A)}{1 - P(A)} = \frac{0,4 - 0,3}{1 - 0,75} = \frac{0,1}{0,25} = 0,4$$

Si el directivo no sabe alemán, la probabilidad de que sepa inglés es **0,4**.

PAU Comunidad Valenciana



MATEMÁTICAS CCSS



Junio 2024

Problema 6
Probabilidad

INTRODUCCIÓN

Si no has trabajado nunca con probabilidad, te recomiendo que veas y trabajes con mi curso de probabilidad básica y con los dos cursos de probabilidad más avanzados, donde explico el álgebra de conjuntos y los teoremas fundamentales de la probabilidad, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Te dejo los códigos QR y los enlaces para que puedas acceder al vídeo correspondiente.



Teoría y ejercicios de probabilidad.

<https://youtu.be/1Dvh2QpL2pw>



Álgebra de conjuntos

https://youtu.be/Pu_6f73w3o8



Teoremas

<https://youtu.be/KS6VfQgGOCA>

Problema 6

Lanzamos un dado de 6 caras bien equilibrado. Si al lanzar el dado obtenemos un número mayor que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda bien construida; pero si al lanzar el dado obtenemos un número menor o igual que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz.

- a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado?
- b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado” y “obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda”.
- c) ¿Son independientes los sucesos “obtener un 6 al lanzar el dado” y “obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda”?

Primero asignamos una letra a cada suceso.

A= Sacar un número mayor que 2 en el dado

B= Sacar un número menor o igual que 2 en el dado

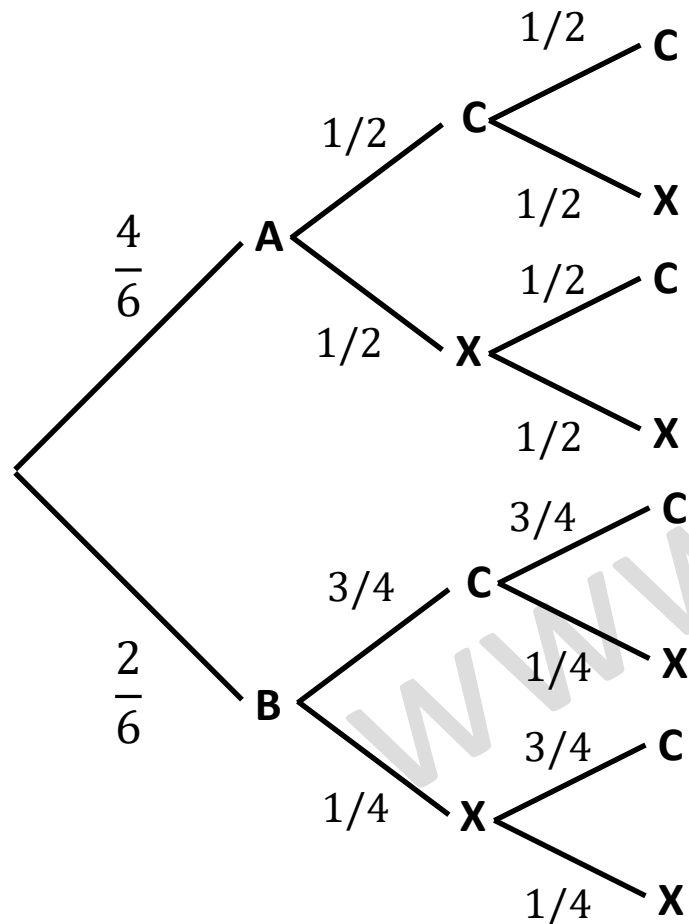
C= La moneda sale cara.

X= La moneda sale cruz.

Problema 6

a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado?

A partir del enunciado se representan todas las posibilidades mediante un diagrama de árbol. El valor de las probabilidades de la moneda trucada se explican en el audio. **Pon el audio del vídeo.**



Se aplica el teorema de Bayes.

$$P(A/(C \cap C)) = \frac{P(A \cap (C \cap C))}{P(C \cap C)} = \frac{P(A) \cdot P((C \cap C)/A)}{P(A) \cdot P((C \cap C)/A) + P(B) \cdot P((C \cap C)/B)}$$

$$P(A/(C \cap C)) = \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{8}{17}$$

Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado es **8/17**.

Problema 6

b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado” y “obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda”.

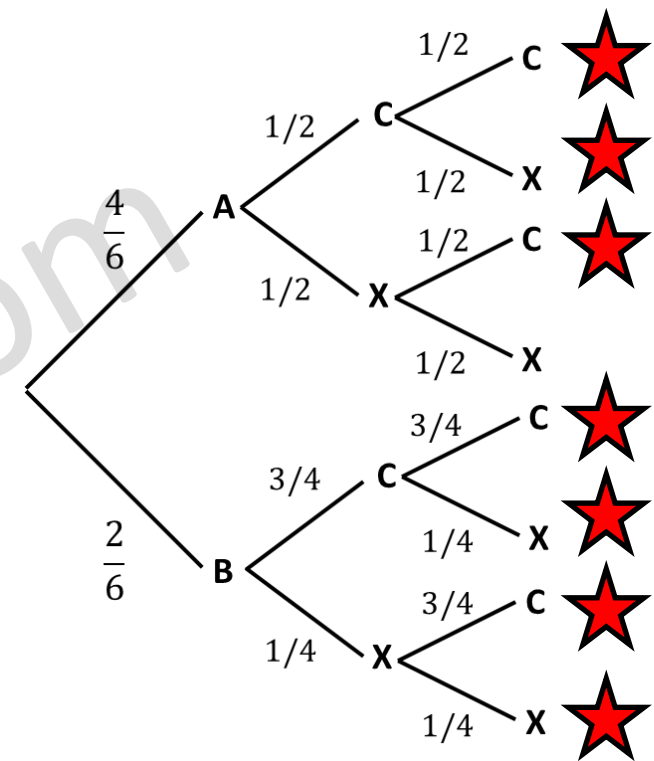
Señalamos en el diagrama de árbol la unión de los sucesos pedidos.

Se calcula la probabilidad de la unión de ambos sucesos. Para ello, es más fácil utilizar la probabilidad del suceso contrario.

Siendo D el suceso, obtener al menos una cara.

$$P(B \cup D) = 1 - P(A \cap X \cap X) = 1 - \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

La probabilidad de la unión de los sucesos “obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado” y “obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda” es **5/6**.



Problema 6

c) ¿Son independientes los sucesos “obtener un 6 al lanzar el dado” y “obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda”?

La probabilidad de obtener un 6 al lanzar el dado es: $P(6) = \frac{1}{6}$

La probabilidad de obtener dos cruces en los lanzamientos de la moneda es:

$$P(X \cap X) = P(A \cap X \cap X) + P(B \cap X \cap X) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{48} = \frac{9}{48} = \frac{3}{16}$$

Para que dos sucesos sean independientes deben cumplir que: $P(6 \cap (X \cap X)) = P(6) \cdot P(X \cap X)$

Debo calcular: $P(6 \cap (X \cap X)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$

Como: $P(6 \cap (X \cap X)) \neq P(6) \cdot P(X \cap X)$ ya que $\frac{1}{24} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{16} \rightarrow \frac{1}{24} \neq \frac{1}{32}$

Los sucesos **NO** son independientes.

