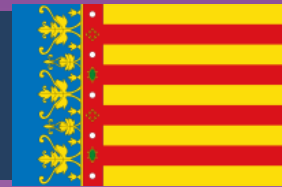




PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2B

JUNIO 2025-RESERVA

Análisis de funciones



Problema 2B

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} - x$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(0,5 puntos)*

Problema 2B

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. $f(x) = \frac{x}{1-x^2} - x$

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $1 - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Por ello, el Dominio es:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}/\{-1, 1\}$$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje Y (} x = 0 \text{)} \rightarrow f(0) = \frac{0}{1-0^2} - 0 = 0 \rightarrow A = (0, 0)$$

$$\text{Eje X (} y = 0 \text{)} \rightarrow \frac{x}{1-x^2} - x = 0 \rightarrow \frac{x - x + x^2}{1-x^2} = 0$$

$$\frac{x^2}{1-x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \quad A = (0, 0)$$

Problema 2B

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los valores de x que están fuera del dominio. En dichos valores, **es posible** que haya una asíntota vertical.

Calculo el límite de la función en $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{1-x^2} - x = \frac{-1}{0} + 1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{1-x^2} - x = \frac{-1}{0^-} + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{1-x^2} - x = \frac{-1}{0^+} + 1 = -\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = -1 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

Calculo el límite de la función en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x^2} - x = \frac{1}{0} - 1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x^2} - x = \frac{1}{0^+} - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1-x^2} - x = \frac{1}{0^-} - 1 = -\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = 1 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función en el último apartado.

Problema 2B

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 - x^2} - x = 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 - x^2} - x = 0 + \infty = +\infty$$

por consiguiente, $f(x)$ no tiene asíntota horizontal

NOTA: El límite del cociente tiende a cero porque el grado del denominador es mayor que el del numerador.

NOTA 2: Al no tener asíntota horizontal, la función puede tener asíntota oblicua. Como no se pide su cálculo, no es necesario realizarlo el día del examen. Con fines pedagógicos se estudiará la existencia de este tipo de asíntota. También nos ayudará a representar más fácilmente la función.

BONUS

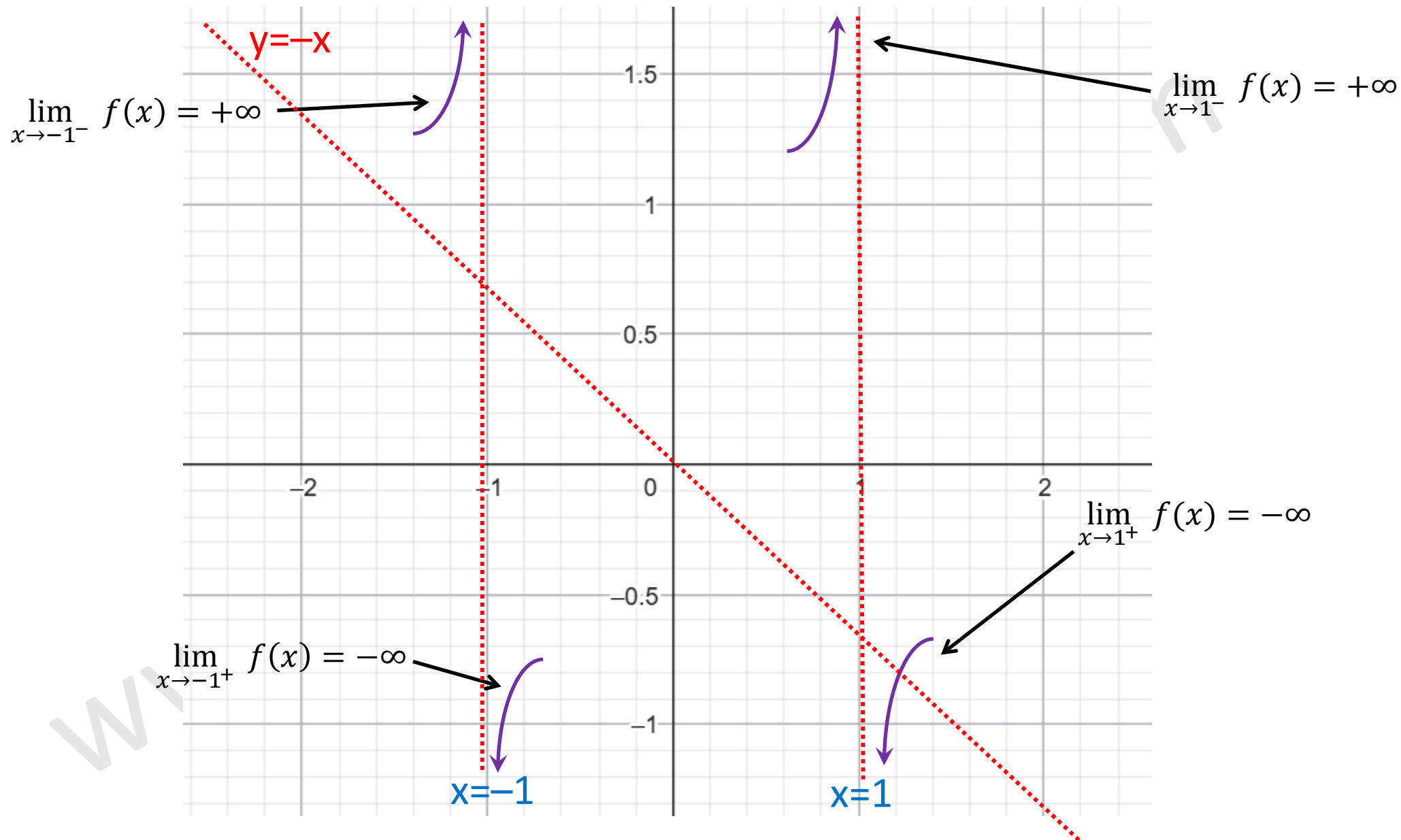
La **asíntota oblicua** se calcula con las fórmulas correspondientes.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x}{1-x^2} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-x^2} - 1 = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - m \cdot x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1-x^2} - x + x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

por consiguiente, $y = -x$ es asíntota oblicua de $f(x)$

NOTA: Se puede situar la curva respecto de la asíntota oblicua en los infinitos dando valores altos a la función a representar y a la función lineal obtenida como asíntota oblicua. En este caso no se hará, pero te animo a hacerlo.



c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. $f(x) = \frac{x}{1-x^2} - x$

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1-x^2) - x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} - 1 = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} - 1 = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} - 1 = \frac{1+x^2-(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1+x^2-1+2x^2-x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^4+3x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2 \cdot (-x^2+3)}{(1-x^2)^2}$$

Igualo la derivada a cero: $\frac{x^2 \cdot (-x^2+3)}{(1-x^2)^2} = 0 \rightarrow x^2 \cdot (-x^2+3) = 0 \rightarrow x = 0; x = -\sqrt{3}; x = \sqrt{3}$

Se estudia el signo de la derivada.

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	
$f(x)$							

$f(x)$ **crece** en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

$f(x)$ **decrece** en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. $f(x) = \frac{x}{1-x^2} - x$

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	
$f(x)$							

Se observa en el cuadro que la función tiene un mínimo relativo en $x = -\sqrt{3}$ y un máximo relativo en $x = \sqrt{3}$.

Se sustituyen esos valores en la función para obtener las imágenes de ambos valores.

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{1 - (-\sqrt{3})^2} - (-\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,598 \quad \text{Las coordenadas del mínimo relativo son:}$$

$$\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} - \sqrt{3} = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \approx -2,598 \quad \text{Las coordenadas del máximo relativo son:}$$

$$\left(\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y = -x$$

$$B = \left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$A = (0, 0)$$

$$C = \left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x = -1$$

$$x = 1$$

