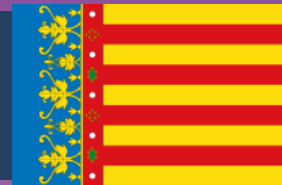




PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS CC.SS

PROBLEMA 1A

JUNIO 2025-RESERVA

Problema de sistemas de ecuaciones



PROBLEMA 1A

En época de regalos navideños, con 225 euros se pueden comprar dos libros, tres plumas estilográficas y un reloj inteligente. Sin embargo, en época de rebajas nos descuentan 5 euros de cada artículo, lo que nos permite comprar un libro más con ese mismo dinero. Después, en febrero, pasada la época de rebajas, cada artículo cuesta 5 euros más que en la época navideña, de manera que, con ese mismo dinero, podemos comprar tres plumas y tres libros, pero ningún reloj inteligente. ¿Cuál es el precio del libro, de la pluma estilográfica y del reloj inteligente en época navideña?

Solución: En primer lugar, se definen las incógnitas del problema.

x = precio del libro en euros

y = precio de la pluma estilográfica en euros

z = precio del reloj inteligente en euros

Se traduce del español al lenguaje algebraico:

"... con 225 euros se pueden comprar dos libros, tres plumas estilográficas y un reloj inteligente." $\longrightarrow 2x + 3y + z = 225$

"... nos descuentan 5 euros de cada artículo, lo que nos permite comprar un libro más con ese mismo dinero" $\longrightarrow 3 \cdot (x - 5) + 3 \cdot (y - 5) + z - 5 = 225$

Reordenando los términos de la ecuación: $3x + 3y + z = 260$

"... cada artículo cuesta 5 euros más que en la época navideña, de manera que, con ese mismo dinero, podemos comprar tres plumas y tres libros, pero ningún reloj inteligente"

$$3 \cdot (x + 5) + 3 \cdot (y + 5) = 225 \longrightarrow 3x + 3y = 195 \longrightarrow x + y = 65$$

PROBLEMA 1A

Quedando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 225 \\ 3x + 3y + z = 260 \\ x + y = 65 \end{cases}$$

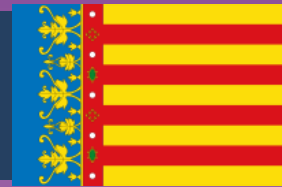
Resolveré el sistema utilizando la regla de Cramer.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 225 & 3 & 1 \\ 260 & 3 & 1 \\ 65 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{35}{1} = 35 \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 225 & 1 \\ 3 & 260 & 1 \\ 1 & 65 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{30}{1} = 30 \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 225 \\ 3 & 3 & 260 \\ 1 & 1 & 65 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{65}{1} = 65$$

Solución: El libro cuesta **35 €**, la pluma estilográfica **30 €** y el reloj inteligente **65 €**.



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS CC.SS

PROBLEMA 1B

JUNIO 2025-RESERVA

Programación lineal

© Ángel Cuesta Arza



PROBLEMA 1B

Un creador de contenido desea invertir en publicidad hasta 10 000 euros. Ha considerado dos empresas, A y B. La empresa de publicidad A es más agresiva, y garantiza un incremento anual en número de seguidores del 10% de lo que se invierte; la B es más tradicional y el incremento en número de seguidores que garantiza es del 7% de lo que se invierte. Así pues, el creador desea invertir al menos 2.000 euros en la empresa B y un máximo de 6.000 euros en la A, invirtiendo siempre en la A al menos lo invertido en la B.

- a) ¿Cuánto dinero tiene que asignar a cada empresa para que el incremento de seguidores sea máximo?
- b) ¿Cuál es dicho incremento de seguidores máximo?

Solución: En primer lugar, se definen las incógnitas del problema.

x= cantidad invertida en la empresa A.
y= cantidad invertida en la empresa B

A partir del enunciado planteamos las restricciones:

"...desea invertir en publicidad hasta 10 000 euros" $\longrightarrow x + y \leq 10000$

"...desea invertir al menos 2.000 euros en la empresa B " $\longrightarrow y \geq 2000$

"...y un máximo de 6.000 euros en la A " $\longrightarrow x \leq 6000$

"...invirtiendo siempre en la A al menos lo invertido en la B" $\longrightarrow x \geq y$

Y la función objetivo:

"...publicidad A ... incremento anual del 10% de lo que se invierte; la B ... el incremento en número de seguidores es del 7% de lo que se invierte" $\longrightarrow z = 0,1x + 0,07y$

PROBLEMA 1B

Quedando el planteamiento definitivo así: En primer lugar, hacemos los cálculos para representar las inecuaciones.

Maximizar: $z = 0,1x + 0,07y$

$$s. a. \begin{cases} x + y \leq 10000 \\ y \geq 2000 \\ x \leq 6000 \\ x \geq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

(a) $x + y \leq 10000$

Expreso la recta: $x + y = 10000$

Se dan valores para representar:

x	y
0	10000
10000	0

Compruebo si (0,0) pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación **(0, 0)**

$0 + 0 \leq 10000 \rightarrow$ Si Cumple; $(0, 0) \in \{x + y \leq 10000\}$

(b) $x \geq y$

Expreso la recta: $x = y$

Se dan valores para representar:

x	y
0	0
10000	10000

Compruebo si (10000,0) pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación **(10000, 0)**

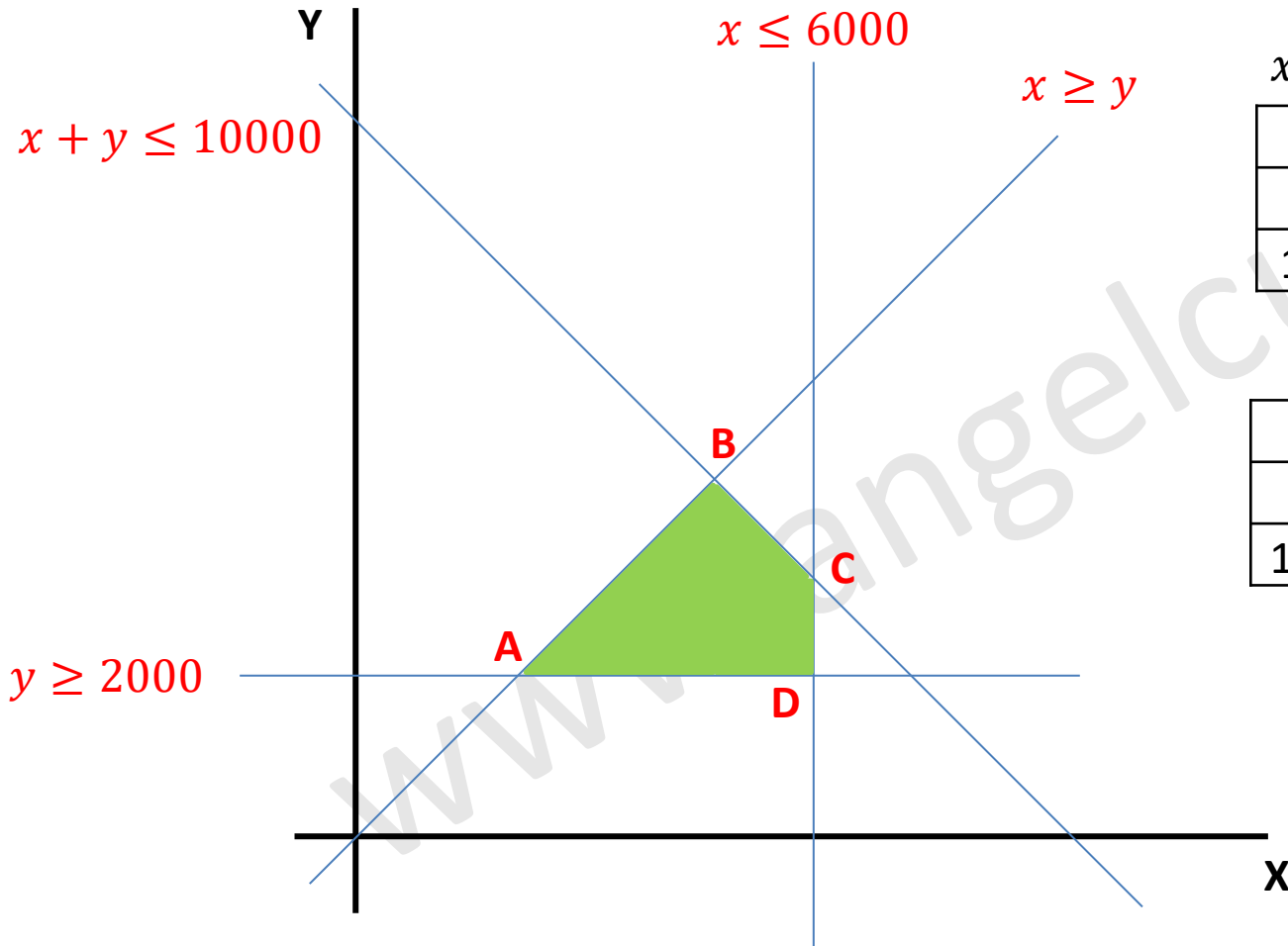
$10000 \geq 0 \rightarrow$ Si Cumple; $(10000, 0) \in \{x \geq y\}$

Las inecuaciones $y \geq 2000$ y $x \leq 6000$ se representan fácilmente, por eso no hace falta dar valores.

PROBLEMA 1B

Representamos las inecuaciones y observamos cual es la región factible.

$$s. a. \begin{cases} x + y \leq 10000 \\ y \geq 2000 \\ x \leq 6000 \\ x \geq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$



$$x + y = 10000$$

x	y
0	10000
10000	0

$$0 + 0 \leq 10000; (0, 0) \in \{x + y \leq 10000\}$$

$$x = y$$

x	y
0	0
10000	10000

$$10000 \geq 0; (10000, 0) \in \{x \geq y\}$$

Tomamos el área común a todas las inecuaciones. Esa zona se llama REGIÓN FACTIBLE (verde)".

PROBLEMA 1B

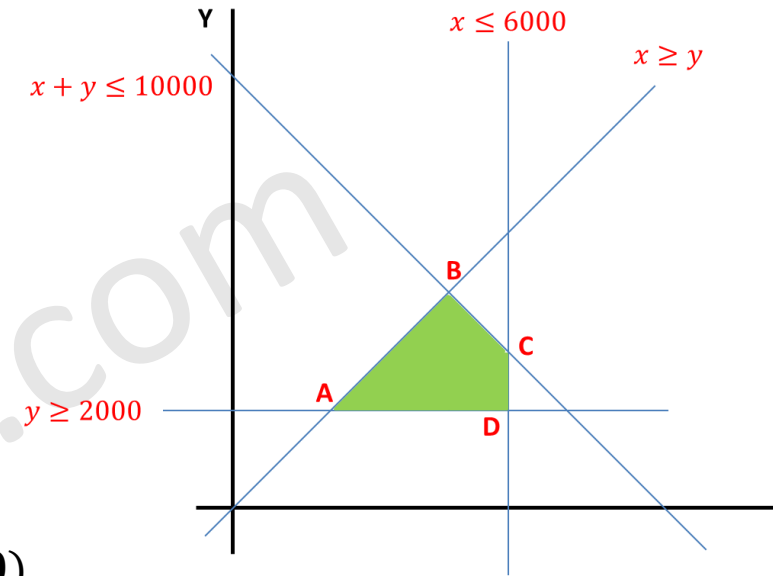
Para calcular las coordenadas de los vértices A,B, C y D, se deben resolver los sistemas de ecuaciones formados por las rectas que dan lugar a dichos vértices.

Vértice A: $\begin{cases} y = 2000 \\ x = y \end{cases}$ Las coordenadas del vértice A son: **A = (2000, 2000)**

Vértice B: $\begin{cases} x + y = 10000 \\ x = y \end{cases}$ Las coordenadas del vértice B son: **B = (5000, 5000)**

Vértice C: $\begin{cases} x = 6000 \\ x + y = 10000 \end{cases}$ Las coordenadas del vértice C son: **C = (6000, 4000)**

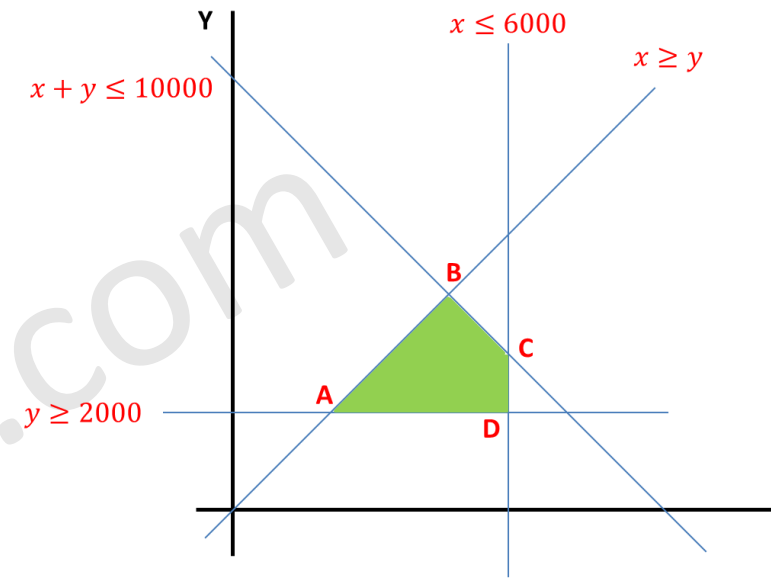
Vértice D: $\begin{cases} y = 2000 \\ x = 6000 \end{cases}$ Las coordenadas del vértice D son: **D = (6000, 2000)**



PROBLEMA 1B

El máximo de la función z , sometida a las restricciones del problema, se alcanzará en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos los valores de la función en los vértices.

x	y	$z = 0,1x + 0,07y$
2000	2000	$0,1 \cdot 2000 + 0,07 \cdot 2000 = 340$
5000	5000	$0,1 \cdot 5000 + 0,07 \cdot 5000 = 850$
6000	4000	$0,1 \cdot 6000 + 0,07 \cdot 4000 = 880$
6000	2000	$0,1 \cdot 6000 + 0,07 \cdot 2000 = 740$



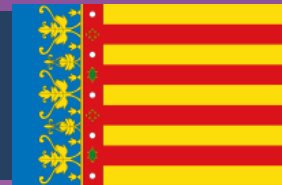
PROBLEMA 1B

Solución: La inversión óptima es asignar **6000 € a la empresa A** y **4000 € a la empresa B**, obteniéndose un incremento máximo de **880 seguidores**

x	y	$z = 0,1x + 0,07y$
2000	2000	$0,1 \cdot 2000 + 0,07 \cdot 2000 = 340$
5000	5000	$0,1 \cdot 5000 + 0,07 \cdot 5000 = 850$
6000	4000	$0,1 \cdot 6000 + 0,07 \cdot 4000 = 880$
6000	2000	$0,1 \cdot 6000 + 0,07 \cdot 2000 = 740$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2A

JUNIO 2025-RESERVA

Análisis de funciones



Problema 2. A. La temperatura, T , de un motor depende de las revoluciones, r , del mismo de forma que entre 0 y 100 revoluciones evoluciona siguiendo una tendencia lineal tal que: $T(r) = \frac{r}{4} + 25$. Sin embargo, a partir de 100 revoluciones la temperatura depende del cuadrado de las revoluciones, de forma que: $T(r) = Ar^2 + B$, siendo A y B números reales.

- a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que la derivada de $T(r)$ en $r=1.600$ vale 4, determina A y B . *(1,5 puntos)*
- b) ¿Existen máximos o mínimos para la temperatura en función de las revoluciones? Justifica la respuesta. *(1 punto)*
- c) Un operario utiliza el motor durante 30 minutos de forma que en el minuto m las revoluciones que tiene el motor vienen dadas por la expresión $r(m) = 5m - 0.15m^2$. Determina en qué minutos las revoluciones son máximas y mínimas, el valor de estas y el valor de la temperatura en esos momentos. *(1 punto)*

Problema 2. A. La temperatura, T , de un motor depende de las revoluciones, r , del mismo de forma que entre 0 y 100 revoluciones evoluciona siguiendo una tendencia lineal tal que: $T(r) = \frac{r}{4} + 25$. Sin embargo, a partir de 100 revoluciones la temperatura depende del cuadrado de las revoluciones, de forma que: $T(r) = Ar^2 + B$, siendo A y B números reales.

Se define la función a trozos a partir del enunciado.
$$T(r) = \begin{cases} \frac{r}{4} + 25 & \text{si } 0 \leq r \leq 100 \\ Ar^2 + B & \text{si } r > 100 \end{cases}$$

a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que la derivada de $T(r)$ en $r=1.600$ vale 4, determina A y B . (1,5 puntos)

Se estudia la continuidad de $T(r)$ en $r = 100$

$$T(100) = \frac{100}{4} + 25 = 50$$

$$\lim_{r \rightarrow 100^-} T(r) = \lim_{r \rightarrow 100^-} \frac{r}{4} + 25 = 50$$

$$\lim_{r \rightarrow 100^+} T(r) = \lim_{r \rightarrow 100^+} Ar^2 + B = 10000A + B$$

$$\left. \begin{array}{l} T(100) = \frac{100}{4} + 25 = 50 \\ \lim_{r \rightarrow 100^-} T(r) = \lim_{r \rightarrow 100^-} \frac{r}{4} + 25 = 50 \\ \lim_{r \rightarrow 100^+} T(r) = \lim_{r \rightarrow 100^+} Ar^2 + B = 10000A + B \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{r \rightarrow 100^-} T(r) = \lim_{r \rightarrow 100^+} T(r) = 50 \rightarrow 10000A + B = 50$$

Problema 2A

a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que la derivada de $T(r)$ en $r=1.600$ vale 4, determina A y B .
(1,5 puntos)

$$T(r) = \begin{cases} \frac{r}{4} + 25 & \text{si } 0 \leq r \leq 100 \\ Ar^2 + B & \text{si } r > 100 \end{cases}$$

Se calcula la derivada de la función

$$T'(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq r < 100 \\ 2Ar & \text{si } r > 100 \end{cases}$$

$$10000A + B = 50$$

Se calcula $T'(1600)$ y se iguala a 4. $2A \cdot 1600 = 4 \rightarrow A = \frac{1}{800}$

Se calcula B : $10000A + B = 50 \rightarrow B = 50 - 10000A \rightarrow B = 50 - 10000 \cdot \frac{1}{800} = 37,5$

Los valores pedidos son: $A = \frac{1}{800}$ $B = 37,5$

Problema 2A

- b) ¿Existen máximos o mínimos para la temperatura en función de las revoluciones?
Justifica la respuesta. (1 punto)

Por simple inspección es fácil comprobar que la función derivada no se anula para ningún valor de r . Por otro lado, se observa que $T'(r) > 0 \forall r \in \mathcal{R}$. Por ello, el mínimo se alcanza en $r = 0$ y la función no alcanza un máximo.

$$T(r) = \begin{cases} \frac{r}{4} + 25 & \text{si } 0 \leq r \leq 100 \\ Ar^2 + B & \text{si } r > 100 \end{cases}$$

$$T'(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq r < 100 \\ 2Ar & \text{si } r > 100 \end{cases}$$

No existen máximos o mínimos relativos. Presenta un mínimo absoluto en $r = 0$ y no hay máximo.

El valor mínimo de la temperatura son 25°C. Se obtiene sustituyendo en la función. No se explica con más detalle ya que no se pide calcular este valor. Se comenta con fines pedagógicos.

- c) Un operario utiliza el motor durante 30 minutos de forma que en el minuto m las revoluciones que tiene el motor vienen dadas por la expresión $r(m) = 5m - 0.15m^2$. Determina en qué minutos las revoluciones son máximas y mínimas, el valor de estas y el valor de la temperatura en esos momentos.

(1 punto)

Puesto que la función propuesta es cuadrática y el coeficiente del término cuadrático es negativo. Ello nos permite afirmar que el máximo relativo se encontrará en el vértice de la parábola. Las mínimas revoluciones se alcanzarán en uno de los extremos del dominio de la función. El dominio de la función es: $0 \leq m \leq 30$.

Se deriva la función y se iguala a cero. $r'(m) = 5 - 0,3m \rightarrow 5 - 0,3m = 0 \rightarrow m = \frac{50}{3} \text{ min} = 1000 \text{ s}$

El máximo de revoluciones se alcanza a los **1000 s**.

El número de revoluciones máximo se obtiene sustituyendo en la función.

$$r\left(\frac{50}{3}\right) = 5 \cdot \left(\frac{50}{3}\right) - 0,15 \cdot \left(\frac{50}{3}\right)^2 = \frac{125}{3} \approx 41,67 \text{ rev}$$

El máximo de revoluciones es **41,67**.

Se calcula la temperatura sustituyendo en el tramo lineal ya que $r_{max} \approx 41,67 < 100$.

$$T\left(\frac{125}{3}\right) = \frac{\frac{125}{3}}{4} + 25 = \frac{425}{12} \approx 35,42 \text{ °C}$$

La temperatura máxima es **35,42 °C**.

$$T(r) = \begin{cases} \frac{r}{4} + 25 & \text{si } 0 \leq r \leq 100 \\ Ar^2 + B & \text{si } r > 100 \end{cases}$$

- c) Un operario utiliza el motor durante 30 minutos de forma que en el minuto m las revoluciones que tiene el motor vienen dadas por la expresión $r(m) = 5m - 0.15m^2$. Determina en qué minutos las revoluciones son máximas y mínimas, el valor de estas y el valor de la temperatura en esos momentos.

(1 punto)

$$T(r) = \begin{cases} \frac{r}{4} + 25 & \text{si } 0 \leq r \leq 100 \\ Ar^2 + B & \text{si } r > 100 \end{cases}$$

El número mínimo de revoluciones se alcanzará en uno de los extremos del dominio: $m = 0$ o $m = 30$.

$$r(0) = 5 \cdot (0) - 0,15 \cdot (0)^2 = 0 \text{ rev} \quad r(30) = 5 \cdot (30) - 0,15 \cdot (30)^2 = 15 \text{ rev}$$

El mínimo de revoluciones se alcanza en el instante inicial, $m = 0$. En este caso el motor está parado y $r(0) = 0 \text{ rev}$.

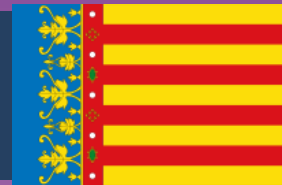
Se calcula la temperatura mínima para $r(0) = 0 \text{ rev}$

$$T(0) = \frac{0}{4} + 25 = 25 \text{ °C}$$

La temperatura mínima es **25 °C**.



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2B

JUNIO 2025-RESERVA

Análisis de funciones



Problema 2B

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} - x$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(0,5 puntos)*

Problema 2B

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. $f(x) = \frac{x}{1-x^2} - x$

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $1 - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Por ello, el Dominio es:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}/\{-1, 1\}$$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje Y (} x = 0 \text{)} \rightarrow f(0) = \frac{0}{1-0^2} - 0 = 0 \rightarrow A = (0, 0)$$

$$\text{Eje X (} y = 0 \text{)} \rightarrow \frac{x}{1-x^2} - x = 0 \rightarrow \frac{x - x + x^2}{1-x^2} = 0$$

$$\frac{x^2}{1-x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \quad A = (0, 0)$$

Problema 2B

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los valores de x que están fuera del dominio. En dichos valores, **es posible** que haya una asíntota vertical.

Calculo el límite de la función en $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{1-x^2} - x = \frac{-1}{0} + 1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{1-x^2} - x = \frac{-1}{0^-} + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{1-x^2} - x = \frac{-1}{0^+} + 1 = -\infty \end{cases}, \text{luego } \boxed{x = -1 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

Calculo el límite de la función en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x^2} - x = \frac{1}{0} - 1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x^2} - x = \frac{1}{0^+} - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1-x^2} - x = \frac{1}{0^-} - 1 = -\infty \end{cases}, \text{luego } \boxed{x = 1 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función en el último apartado.

Problema 2B

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 - x^2} - x = 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 - x^2} - x = 0 + \infty = +\infty$$

por consiguiente, $f(x)$ no tiene asíntota horizontal

NOTA: El límite del cociente tiende a cero porque el grado del denominador es mayor que el del numerador.

NOTA 2: Al no tener asíntota horizontal, la función puede tener asíntota oblicua. Como no se pide su cálculo, no es necesario realizarlo el día del examen. Con fines pedagógicos se estudiará la existencia de este tipo de asíntota. También nos ayudará a representar más fácilmente la función.

BONUS

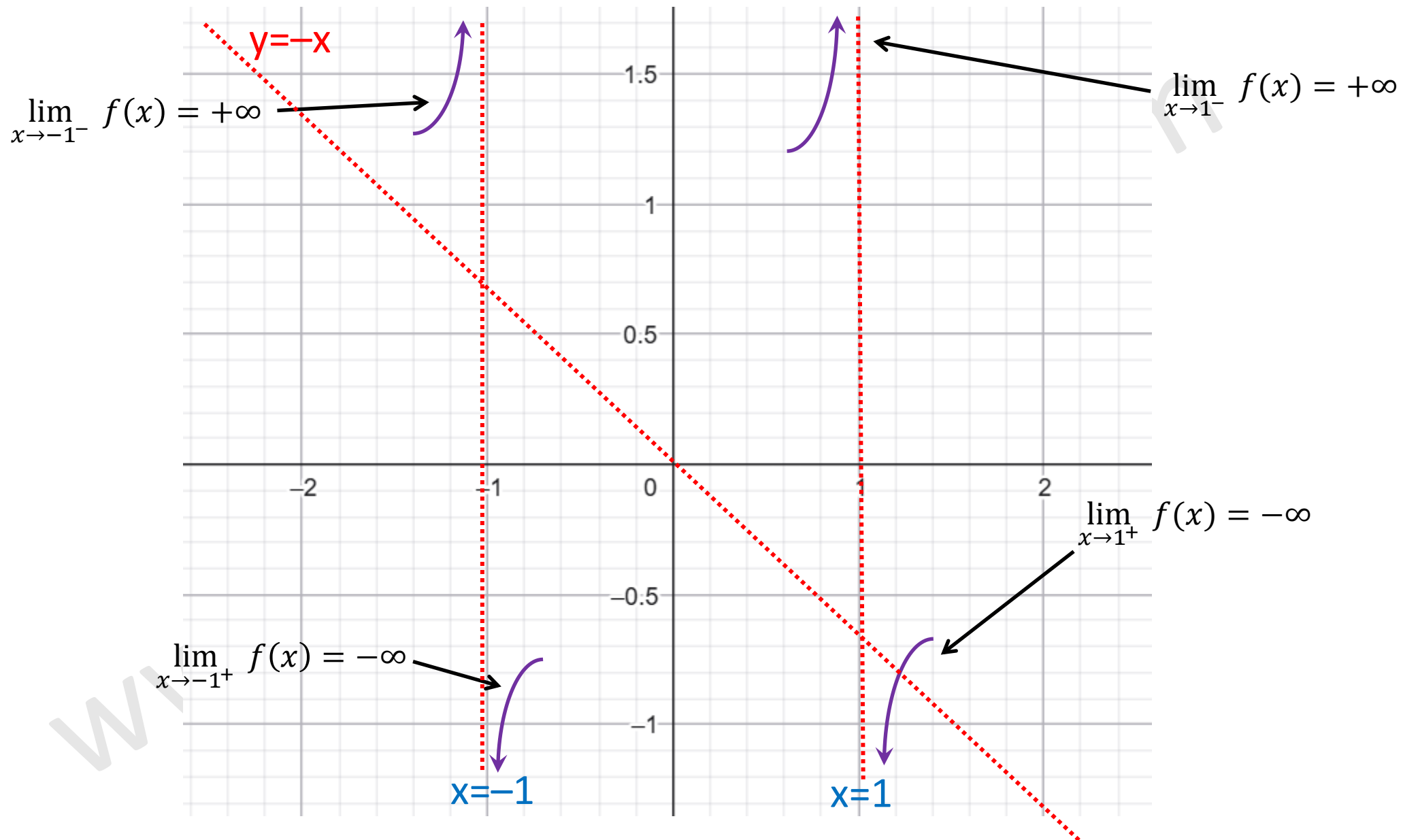
La **asíntota oblicua** se calcula con las fórmulas correspondientes.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x}{1-x^2} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-x^2} - 1 = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - m \cdot x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1-x^2} - x + x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

por consiguiente, $y = -x$ es asíntota oblicua de $f(x)$

NOTA: Se puede situar la curva respecto de la asíntota oblicua en los infinitos dando valores altos a la función a representar y a la función lineal obtenida como asíntota oblicua. En este caso no se hará, pero te animo a hacerlo.



c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. $f(x) = \frac{x}{1-x^2} - x$

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1-x^2) - x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} - 1 = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} - 1 = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} - 1 = \frac{1+x^2 - (1-x^2)^2}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1+x^2-1+2x^2-x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^4+3x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2 \cdot (-x^2+3)}{(1-x^2)^2}$$

Igualo la derivada a cero: $\frac{x^2 \cdot (-x^2+3)}{(1-x^2)^2} = 0 \rightarrow x^2 \cdot (-x^2+3) = 0 \rightarrow x = 0; x = -\sqrt{3}; x = \sqrt{3}$

Se estudia el signo de la derivada.

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	+	+	+	-
$f(x)$							

$f(x)$ **crece** en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

$f(x)$ **decrece** en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. $f(x) = \frac{x}{1-x^2} - x$

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	
$f(x)$							

Se observa en el cuadro que la función tiene un mínimo relativo en $x = -\sqrt{3}$ y un máximo relativo en $x = \sqrt{3}$.

Se sustituyen esos valores en la función para obtener las imágenes de ambos valores.

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{1 - (-\sqrt{3})^2} - (-\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,598 \quad \text{Las coordenadas del mínimo relativo son:}$$

$$\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} - \sqrt{3} = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \approx -2,598 \quad \text{Las coordenadas del máximo relativo son:}$$

$$\left(\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y = -x$$

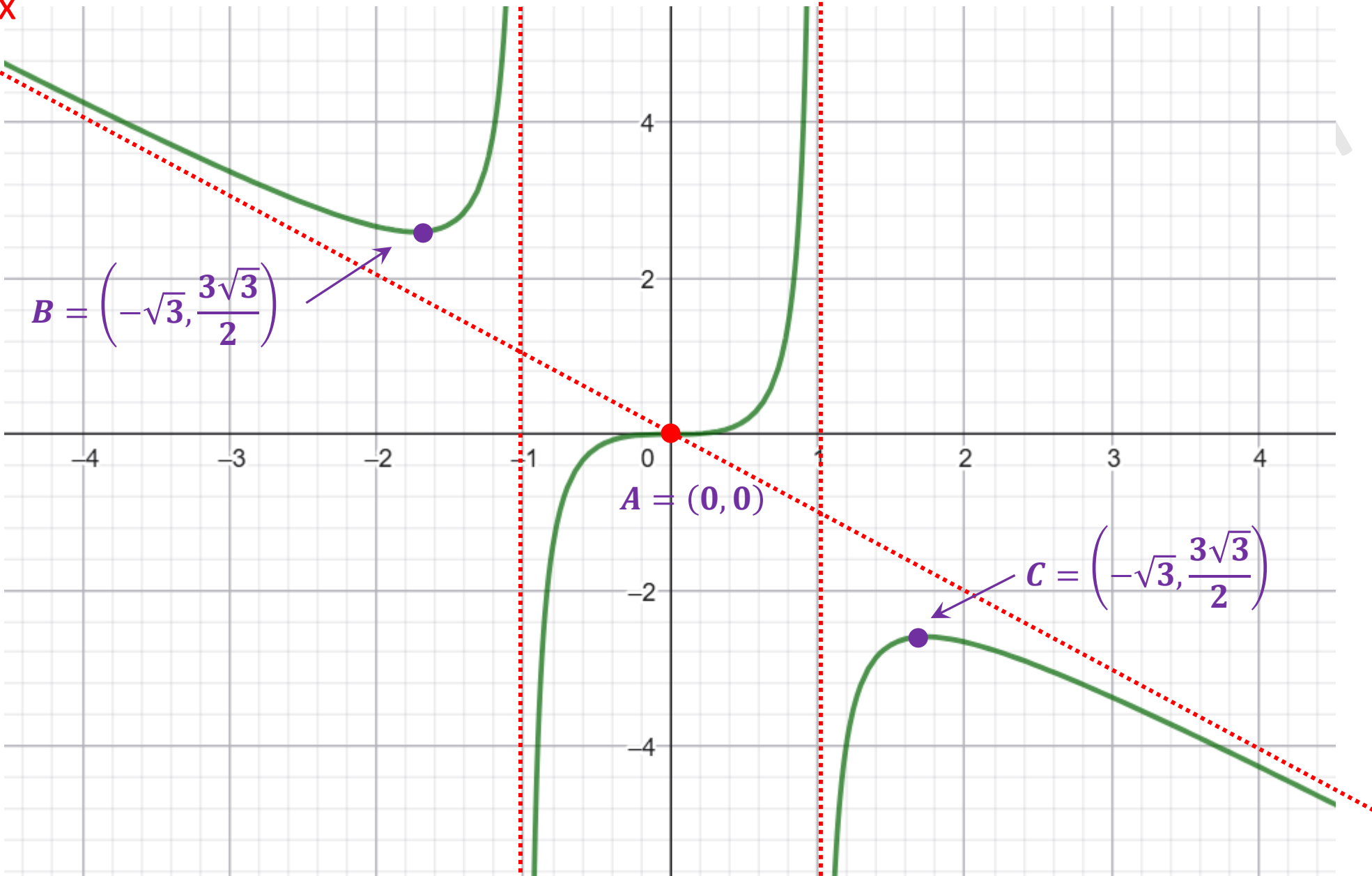
$$B = \left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$A = (0, 0)$$

$$C = \left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x = -1$$

$$x = 1$$





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 3

JUNIO 2025-RESERVA

Probabilidad

©Angel Cuesta Arza



Problema 3. Una prueba diagnóstica para detectar la artritis reumatoide da positiva en el 96% de los casos cuando se tiene la enfermedad, y da negativa en el 94% de los casos cuando no se tiene la enfermedad. Entre los habitantes de un cierto pueblo, se sabe que uno de cada ciento cuarenta y cinco tiene la enfermedad sin saberlo. Se escoge al azar un habitante de este pueblo y se le aplica la prueba.

- a) Calcula la probabilidad de que el habitante seleccionado padezca artritis reumatoide y la prueba haya dado negativa. *(1 punto)*
- b) Si el resultado de la prueba ha dado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el habitante seleccionado padezca artritis reumatoide? *(1 punto)*
- c) Calcula la probabilidad de que el resultado de la prueba sea correcto. *(1 punto)*

Primero asignamos una letra a cada suceso.

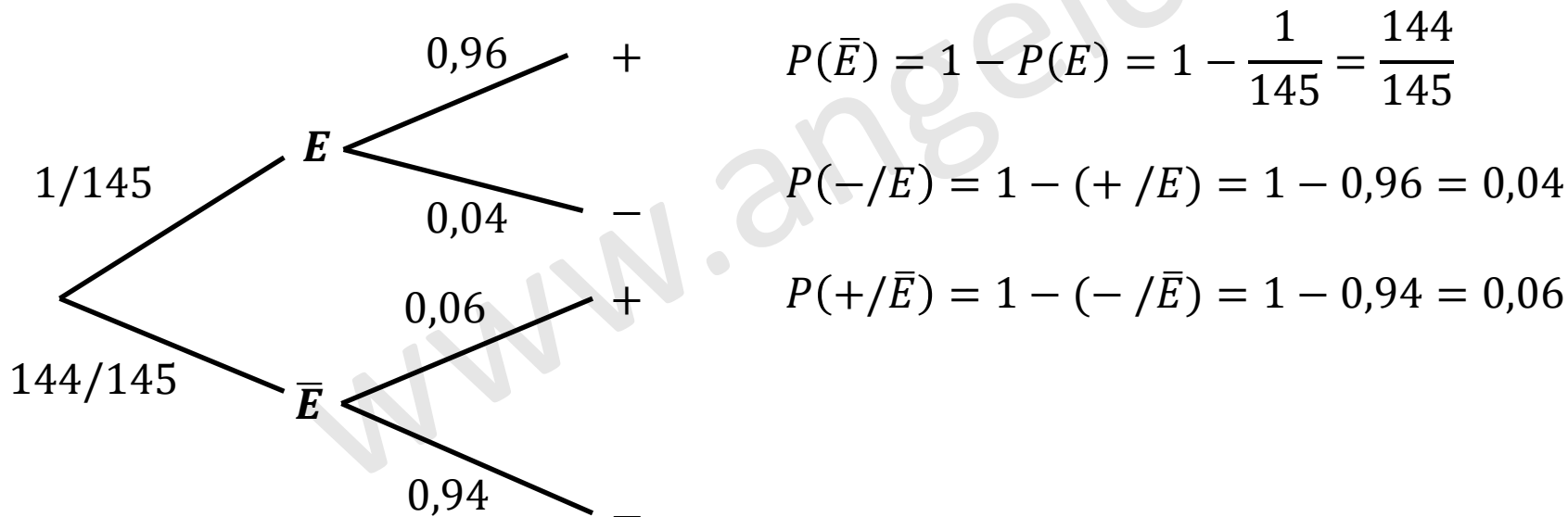
Tomamos datos del enunciado.

“uno de cada ciento cuarenta y cinco tiene la enfermedad sin saberlo” $\rightarrow P(E) = 1/145$

“da positiva en el 96% de los casos cuando se tiene la enfermedad” $\rightarrow P(+ / E) = 0,96$

“y da negativa en el 94% de los casos cuando no se tiene la enfermedad” $\rightarrow P(- / \bar{E}) = 0,94$

A partir de estos datos, representaremos un diagrama de árbol que muestre todas las posibilidades.



Problema 3

- a) Calcula la probabilidad de que el habitante seleccionado padezca artritis reumatoide y la prueba haya dado negativa.
(1 punto)

Se aplica el principio de multiplicación.

$$P(E \cap -) = P(E) \cdot P(-/E) = 1/145 \cdot 0,04 = 2,7586 \cdot 10^{-4}$$

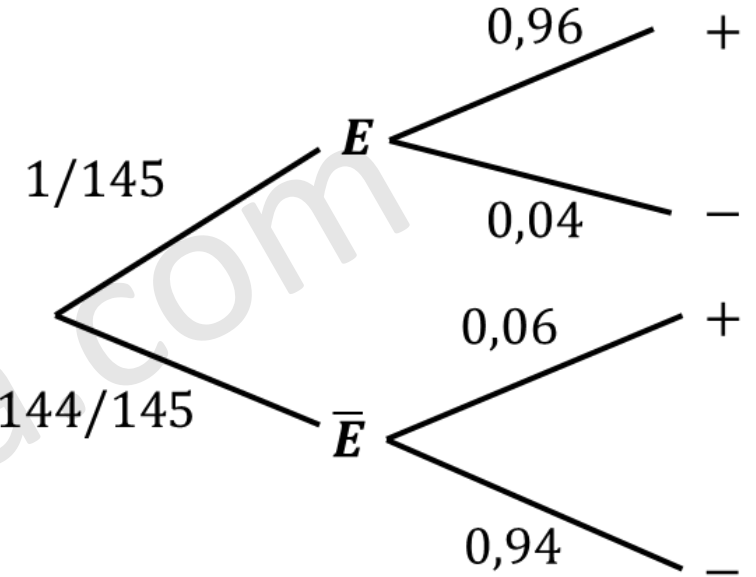
La probabilidad de que el habitante seleccionado padezca artritis reumatoide y la prueba haya dado negativa es $2,7586 \cdot 10^{-4}$ (0,0276 %)

- b) Si el resultado de la prueba ha dado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el habitante seleccionado padezca artritis reumatoide?
(1 punto)

Se aplica el teorema de Bayes:

$$P(E/+)=\frac{P(E \cap +)}{P(+)}=\frac{P(E) \cdot P(+/E)}{P(E) \cdot P(+/E)+P(\bar{E}) \cdot P(+/\bar{E})}=\frac{1/145 \cdot 0,96}{1/145 \cdot 0,96+144/145 \cdot 0,06}=0,1$$

Si el resultado de la prueba ha dado positivo, la probabilidad de que el habitante seleccionado padezca artritis reumatoide es **0,1 (10%)**.
Bastante bajo, por cierto.



Problema 3

c) Calcula la probabilidad de que el resultado de la prueba sea correcto.

Se aplica el teorema de la probabilidad total.

$$P(E \cap +) + P(\bar{E} \cap -) = P(E) \cdot P(+/E) + P(\bar{E}) \cdot P(-/\bar{E}) = 1/145 \cdot 0,96 + 144/145 \cdot 0,94 = \mathbf{0,9401}$$

La probabilidad de que el test dé el resultado correcto es **0,9401 (94,01%)**.

