



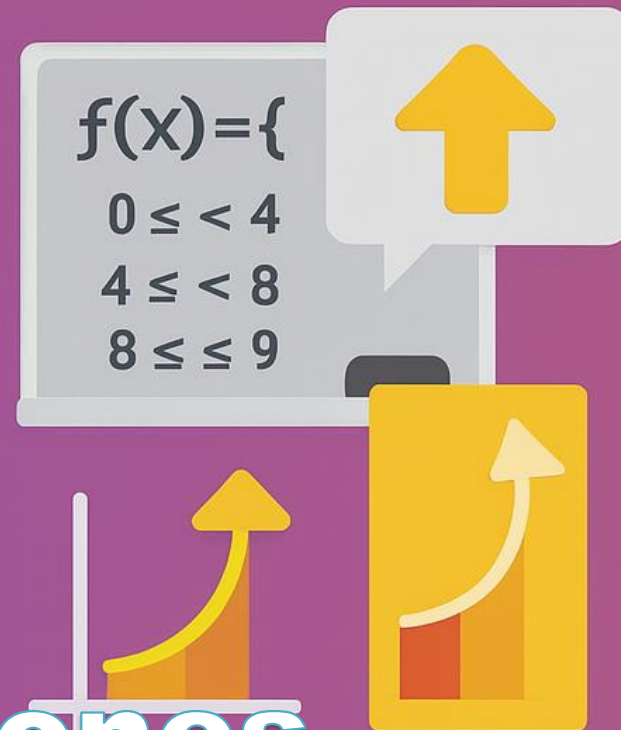
PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS CC.SS.

Problema 2 A
Junio 2025

Análisis de funciones



Problema 2A

Problema 2. A. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x+4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x+60-x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Se pide:

- a) Estudiar la continuidad de la función en el intervalo $[0,9]$. *(0,75 puntos)*
- b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $[0,9]$. *(1,5 puntos)*
- c) Calcular los puntos donde la función alcanza el máximo y el mínimo, y cuánto vale la función en esos puntos. *(0,5 puntos)*
- d) Calcular el área de la región delimitada por esta función, el eje OX , la recta de ecuación $x = 8$ y la recta de ecuación $x = 9$. *(0,75 puntos)*

Problema 2A

Se considera la función:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x+4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x+60-x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de la función en el intervalo $[0,9]$.

Se estudia la continuidad de $f(x)$ en $x = 4$ y $x = 8$ ya que en el resto del dominio la función es continua. Aunque en el primer trozo $x = -1$ anula el denominador, dicho valor no pertenece al dominio de la función.

$$f(4) = 2 \cdot 4 + 4 = 12$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{1+4^2}{1+4} = \frac{17}{5} \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} 2x+4 = 2 \cdot 4 + 4 = 12 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

$f(x)$ no es continua en $x = 4$. Presenta una discontinuidad inevitable de salto finito.

Problema 2A

Se considera la función:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x+4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x+60-x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de la función en el intervalo $[0,9]$.

$$f(8) = 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 20$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} 2x + 4 = 2 \cdot 8 + 4 = 20$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} 3x + 60 - x^2 = 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 20$$

$$\longrightarrow f(8) = \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x)$$

$f(x)$ es continua en $x = 8$

Problema 2A

b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $[0,9]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x + 4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x + 60 - x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Se calcula $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x \cdot (1+x) - (1+x^2) \cdot 1}{(1+x)^2} \\ 2 \\ 3 - 2x \end{cases} \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 1}{(1+x)^2} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si } 4 < x < 8 \\ 3 - 2x & \text{si } 8 < x \leq 9 \end{cases}$$

Se resuelve $f'(x) = 0$:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 1}{(1+x)^2} = 0 \longrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} & \in 0 \leq x < 4 \\ x = -1 - \sqrt{2} & \notin 0 \leq x < 4 \end{cases} \\ 2 \\ 3 - 2x = 0 \longrightarrow x = \frac{3}{2} \notin 8 < x \leq 9 \end{cases} \quad \text{No válida}$$

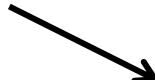
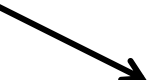
Se hace un estudio de signos de la función derivada en la siguiente diapositiva.

Problema 2A

b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $[0,9]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x+4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x+60-x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Recordamos la función derivada. $f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si } 4 < x < 8 \\ 3-2x & \text{si } 8 < x \leq 9 \end{cases}$

	0	$-1 + \sqrt{2}$	4	8	9
$f'(x)$		-	+	+	-
$f(x)$					

$$f'(0,2) = \frac{(0,2)^2 + 2 \cdot 0,2 - 1}{(1 + 0,2)^2} < 0 \quad f'(0,5) = \frac{(0,5)^2 + 2 \cdot 0,5 - 1}{(1 + 0,5)^2} > 0 \quad f'(6) = 2 > 0 \quad f'(8,5) = 3 - 2 \cdot 8,5 < 0$$

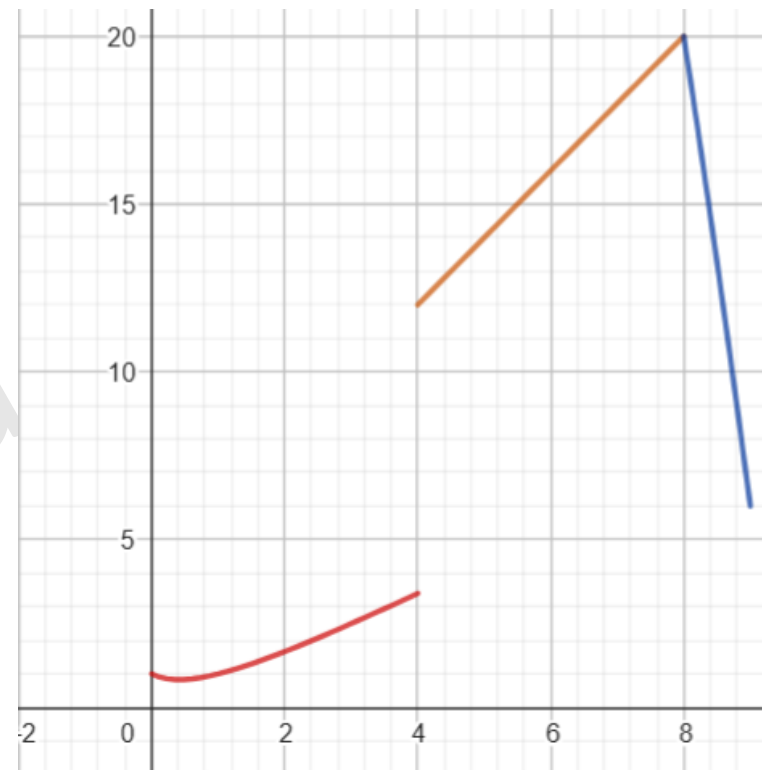
$f(x)$ crece si $x \in (-1 + \sqrt{2}, 8)$ y decrece si $x \in [0, -1 + \sqrt{2}) \cup (8, 9]$

NOTA ACERCA DE LA DEFINICIÓN DE CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN.

Un punto de discontinuidad es aquel donde la función no es continua, como un salto, un agujero o una asíntota vertical. Sin embargo, la función podría comportarse de manera creciente en ese punto, aunque no de forma continua.

Una función es creciente en un punto si, en un entorno de ese punto, los valores de la función son mayores o iguales a medida que se alejan del punto en ambas direcciones. En términos más simples, la función "asciende" a medida que avanzamos en el eje X.

La definición formal de un intervalo creciente es: un intervalo abierto en el eje x de (a, d) donde cada $b, c \in (a, d)$ con $b < c$ tiene $f(b) \leq f(c)$. Por lo que, si aplicamos ésta a nuestra función, podemos observar que es creciente si $x \in (-1 + \sqrt{2}, 8)$ ya que $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow +} f(x)$, y no sólo en $x \in (-1 + \sqrt{2}, 4) \cup (4, 8)$

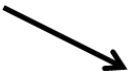


Problema 2A

c) Calcular los puntos donde la función alcanza el máximo y el mínimo, y cuánto vale la función en esos puntos.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x+4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x+60-x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Se utiliza el estudio de signos de la función derivada hecho en el apartado anterior.

	0	$-1 + \sqrt{2}$	4	8	9
$f'(x)$		-	+	+	-
$f(x)$					

Se observa que en $x = -1 + \sqrt{2}$ la función presenta un mínimo relativo y en $x = 8$ presenta un máximo relativo.

Se calcula el máximo y el mínimo local de la función.

$$f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{1 + (-1 + \sqrt{2})^2}{1 + (-1 + \sqrt{2})} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 2 \quad f(8) = 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 20$$

Se calcula el valor de la función en los puntos inicial y final para ver si alguno de ellos es un máximo o mínimo absoluto.

$$f(0) = \frac{1 + 0^2}{1 + 0} = 1 \quad f(9) = 3 \cdot 9 + 60 - 9^2 = 6$$

Máximo absoluto **(8, 20)**

Mínimo absoluto **$(-1 + \sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2)$**

Problema 2A

d) Calcular el área de la región delimitada por esta función, el eje OX , la recta de ecuación $x = 8$ y la recta de ecuación $x = 9$.

Puesto que $f(8)$ y $f(9)$ son ambos positivos, podemos calcular directamente el área bajo a curva mediante una integral.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x + 4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x + 60 - x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

$$\int_8^9 (3x + 60 - x^2) dx = \left[3 \cdot \frac{x^2}{2} + 60x - \frac{x^3}{3} \right]_8^9 = 3 \cdot \frac{9^2}{2} + 60 \cdot 9 - \frac{9^3}{3} - \left(3 \cdot \frac{8^2}{2} + 60 \cdot 8 - \frac{8^3}{3} \right) = \frac{79}{6} \text{ u. a.}$$

El área bajo la curva entre $x = 8$, $x = 9$ y el eje OX es **79/6 unidades de área.**