



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS CC.SS.

Problema 1 A
Junio 2025



Programación lineal

PROBLEMA 1A

Una empresa fabrica lotes de tres productos: P1, P2 y P3. La empresa tiene dos plantas de fabricación: A y B. En un día de funcionamiento, la planta A fabrica 1 lote del producto P1, 2 lotes del P2 y 1 lote del P3, mientras que la planta B fabrica 1 lote del producto P1, 1 del P2 y 5 del P3. Cada día de funcionamiento de la planta A cuesta 60 miles de euros y cada día de funcionamiento de la planta B cuesta 75 miles de euros. En los próximos días la empresa tiene que producir al menos 6 lotes del producto P1, al menos 8 lotes del producto P2 y al menos 10 lotes del producto P3.

a) ¿Cuántos días ha de funcionar cada planta para que el coste de producción sea mínimo?

b) ¿Cuál es dicho coste mínimo?

Solución: En primer lugar, se definen las incógnitas del problema.

Resumimos los datos del problema en una tabla.

x = número de días que debe funcionar la planta A.

y = número de días que debe funcionar la planta B.

		Lote P1	Lote P2	Lote P3	Coste
Número de días que debe funcionar la planta A	x	x	$2x$	x	$60x$ (miles €)
Número de días que debe funcionar la planta B	y	y	y	$5y$	$75y$ (miles €)

A partir de la tabla y del enunciado planteamos las restricciones:

PROBLEMA 1A

		Lote P1	Lote P2	Lote P3	Coste
Número de días que debe funcionar la planta A	x	x	$2x$	x	$60x$ (miles €)
Número de días que debe funcionar la planta B	y	y	y	$5y$	$75y$ (miles €)

A partir de la tabla y del enunciado planteamos las restricciones:

$$\begin{array}{ll} \text{"...al menos 6 lotes del producto P1"} & \longrightarrow x + y \geq 6 \\ \text{"...al menos 8 lotes del producto P2"} & \longrightarrow 2x + y \geq 8 \\ \text{"...al menos 10 lotes del producto P3"} & \longrightarrow x + 5y \geq 10 \\ \text{"restricciones triviales"} & \longrightarrow x \geq 0; y \geq 0 \end{array}$$

La función objetivo está definida por coste: $z = 60x + 75y$ (en miles de euros)

PROBLEMA 1A

Quedando el planteamiento definitivo así: En primer lugar, hacemos los cálculos para representar las inecuaciones.

Minimizar: $z = 75x + 60y$

$$\text{s. a.} \begin{cases} x + y \geq 6 \\ 2x + y \geq 8 \\ x + 5y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

(a) $x + y \geq 6$

Expreso la recta: $x + y = 6$

Se dan valores para representar:

x	y
0	6
6	0

Compruebo si (0,0) pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación (0,0)

$$0 + 0 \geq 6 \rightarrow \text{No Cumple; } (0,0) \notin \{x + y \geq 6\}$$

(b) $2x + y \geq 8$

Expreso la recta: $2x + y = 8$

Se dan valores para representar:

x	y
0	8
4	0

Compruebo si (0,0) pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación (0,0)

$$2 \cdot 0 + 0 \geq 8 \rightarrow \text{No Cumple; } (0,0) \notin \{2x + y \geq 8\}$$

(c) $x + 5y \geq 10$

Expreso la recta: $x + 5y = 10$

Se dan valores para representar:

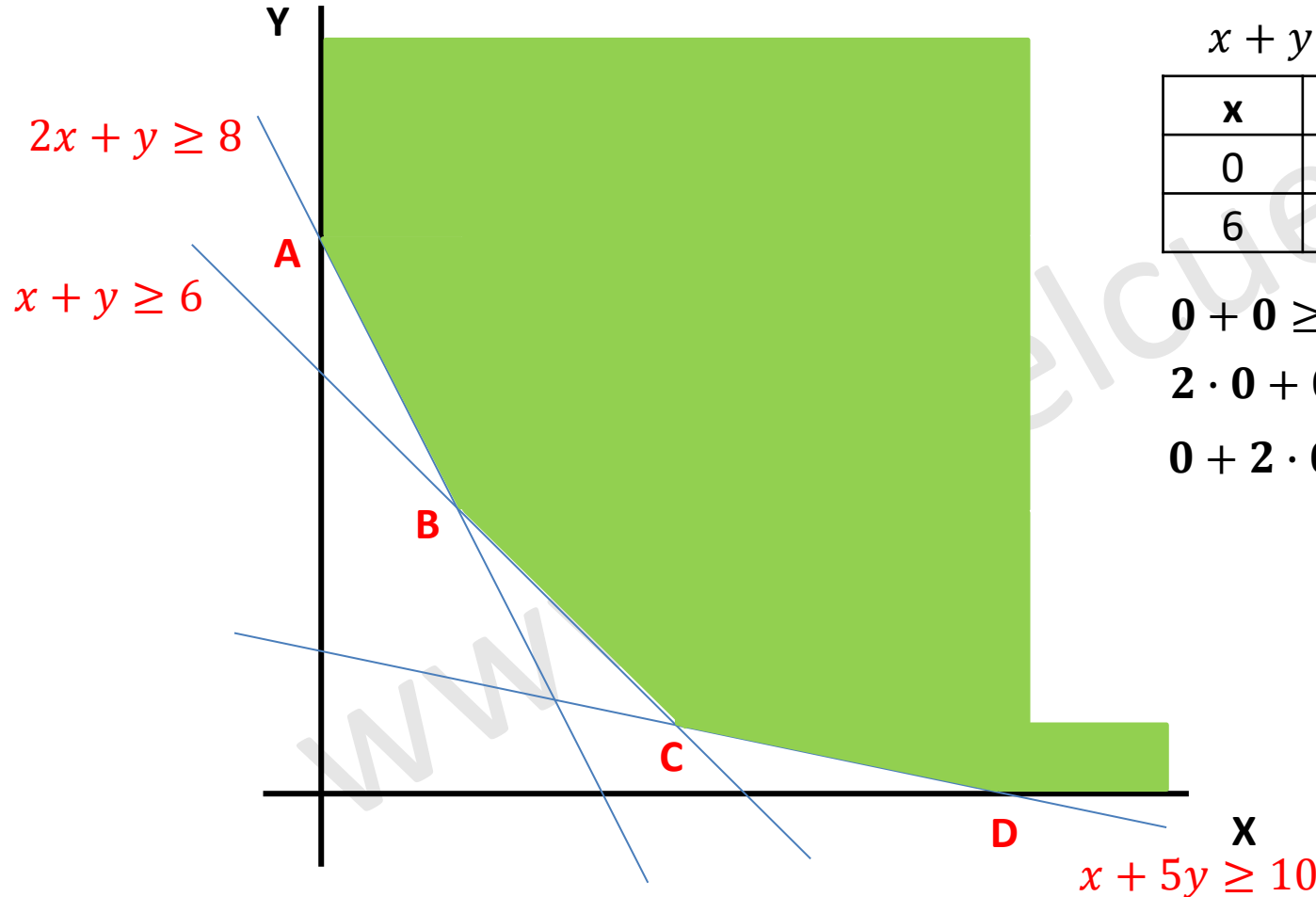
x	y
0	2
10	0

Compruebo si (0,0) pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación (0,0)

$$0 + 5 \cdot 0 \geq 10 \rightarrow \text{No Cumple; } (0,0) \notin \{x + 5y \geq 10\}$$

Representamos las inecuaciones y observamos cual es la región factible.

$$s. a. \begin{cases} x + y \geq 6 \\ 2x + y \geq 8 \\ x + 5y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$



$$x + y = 6$$

x	y
0	6
6	0

$$2x + y = 8$$

x	y
0	8
4	0

$$x + 5y = 10$$

x	y
0	2
10	0

$$0 + 0 \geq 6; (0, 0) \notin \{x + y \geq 6\}$$

$$2 \cdot 0 + 0 \geq 8; (0, 0) \notin \{2x + y \geq 8\}$$

$$0 + 2 \cdot 0 \leq 100; (0, 0) \notin \{x + 5y \geq 10\}$$

PROBLEMA 1A

Para calcular las coordenadas de los vértices B y C, se deben resolver los sistemas de ecuaciones formados por las rectas que dan lugar a dichos vértices. Los vértices A y D, no hace falta calcularlos porque ya disponemos de sus coordenadas (son los puntos de corte con los ejes).

Vértice B:
$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Resolvemos utilizando la regla de Cramer:
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{1} = 2 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{1} = 4$$

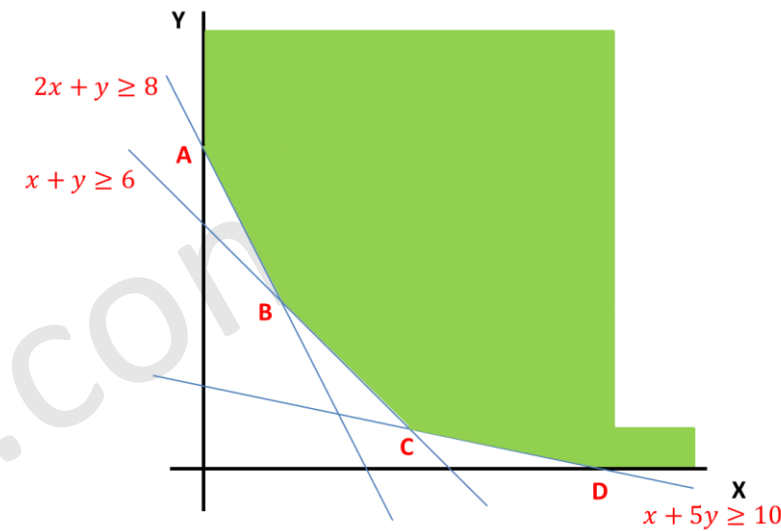
Las coordenadas del vértice B son: **B** = (2, 4)

Vértice C:
$$\begin{cases} x + 5y = 10 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Resolvemos utilizando la regla de Cramer:
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{-4} = 5 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Las coordenadas del vértice B son: **C** = (5, 1)

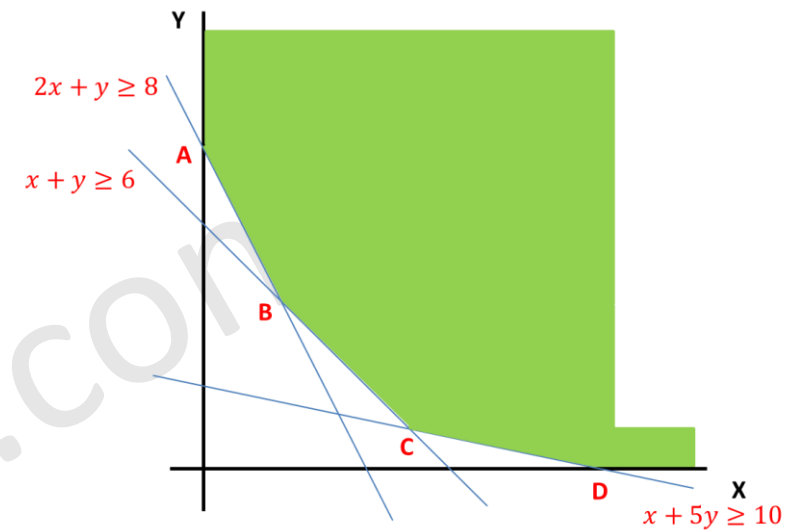
Las coordenadas del resto de vértices son: **A** = (0, 8); **D**(10, 0)



PROBLEMA 1A

El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices.

x	y	$z = 60x + 75y$
0	8	$60 \cdot 0 + 75 \cdot 8 = 600$
2	4	$60 \cdot 2 + 75 \cdot 4 = 420$
5	1	$60 \cdot 5 + 75 \cdot 1 = 375$
10	0	$60 \cdot 10 + 75 \cdot 0 = 600$



PROBLEMA 1A

Solución: la planta A debe funcionar **5 días** y la planta B debe funcionar **1 día**. Con esta combinación, cumplirá las restricciones dadas y el coste (mínimo) será de **375000 euros (375 miles de euros)**.

x	y	$z = 60x + 75y$
0	8	$60 \cdot 0 + 75 \cdot 8 = 600$
2	4	$60 \cdot 2 + 75 \cdot 4 = 420$
5	1	$60 \cdot 5 + 75 \cdot 1 = 375$
10	0	$60 \cdot 10 + 75 \cdot 0 = 600$



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS CC.SS.

Problema 1.B
Junio 2025



Problema de sistemas de ecuaciones

PROBLEMA 1B

A un espectáculo circense acuden 500 espectadores, y la recaudación del importe de las entradas asciende a 2115 euros. Los menores de 5 años pagan el 20% de la entrada, y los que tienen entre 5 y 16 años el 50%. Calcula cuántos espectadores han pagado el importe total de la entrada, que vale 9 euros, cuántos han pagado el 20% de la entrada y cuántos el 50%, sabiendo que el número de espectadores que han pagado el 20% es el doble del número de espectadores que han pagado la entrada completa.

Solución: En primer lugar, se definen las incógnitas del problema.

x = número de espectadores que pagan el 100% y = número de espectadores que pagan el 20% z = número de espectadores que pagan el 50%
--

Se traduce del español al lenguaje algebraico:

"A un espectáculo circense acuden 500 espectadores" $\longrightarrow x + y + z = 500$

"Los menores de 5 años pagan el 20% de la entrada" $\longrightarrow 0,2 \cdot 9 = 1,8 \text{ € por entrada}$

"los que tienen entre 5 y 16 años el 50%" $\longrightarrow 0,5 \cdot 9 = 4,5 \text{ € por entrada}$

"... la recaudación del importe de las entradas asciende a 2.115 euros." $\longrightarrow 9x + 1,8y + 4,5z = 2115$

"el número de espectadores que han pagado el 20% es el doble del número de espectadores que han pagado la entrada completa."

$$y = 2x \longrightarrow -2x + y = 0$$

PROBLEMA 1B

Quedando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ 9x + 1,8y + 4,5z = 2115 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

Resolveré el sistema utilizando la regla de Cramer.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 500 & 1 & 1 \\ 2115 & 1,8 & 4,5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1,8 & 4,5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-135}{-0,9} = 150$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 500 & 1 \\ 9 & 2115 & 4,5 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1,8 & 4,5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-270}{-0,9} = 300$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 500 \\ 9 & 1,8 & 2115 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1,8 & 4,5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-45}{-0,9} = 50$$

Solución: **150** personas pagan la entrada completa, **300** personas pagan la entrada que cuesta el 20% y **50** personas pagan la entrada que cuesta el 50%.



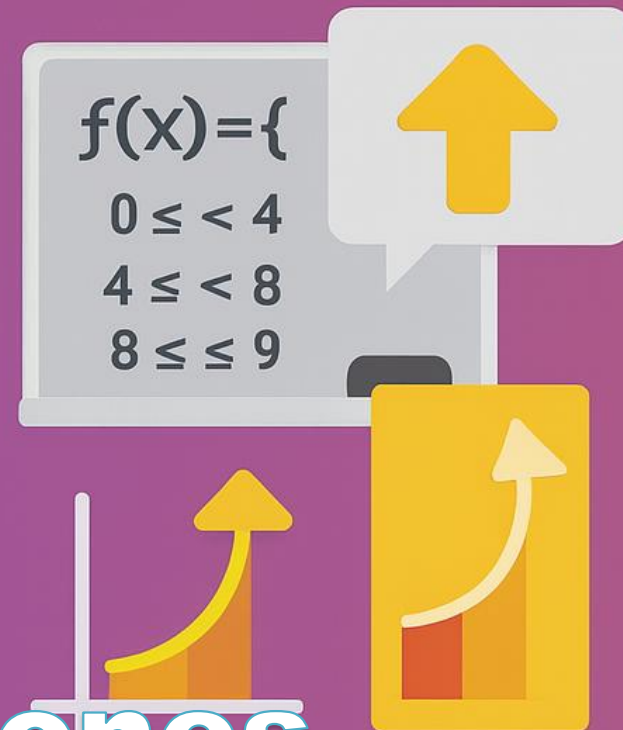
PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS CC.SS.

Problema 2 A
Junio 2025

Análisis de funciones



Problema 2A

Problema 2. A. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x+4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x+60-x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Se pide:

- a) Estudiar la continuidad de la función en el intervalo $[0,9]$. *(0,75 puntos)*
- b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $[0,9]$. *(1,5 puntos)*
- c) Calcular los puntos donde la función alcanza el máximo y el mínimo, y cuánto vale la función en esos puntos. *(0,5 puntos)*
- d) Calcular el área de la región delimitada por esta función, el eje OX , la recta de ecuación $x = 8$ y la recta de ecuación $x = 9$. *(0,75 puntos)*

Problema 2A

Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x+4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x+60-x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de la función en el intervalo $[0,9]$.

Se estudia la continuidad de $f(x)$ en $x = 4$ y $x = 8$ ya que en el resto del dominio la función es continua. Aunque en el primer trozo $x = -1$ anula el denominador, dicho valor no pertenece al dominio de la función.

$$f(4) = 2 \cdot 4 + 4 = 12$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{1+4^2}{1+4} = \frac{17}{5} \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} 2x+4 = 2 \cdot 4 + 4 = 12 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

$f(x)$ no es continua en $x = 4$. Presenta una discontinuidad inevitable de salto finito.

Problema 2A

Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x+4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x+60-x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de la función en el intervalo $[0,9]$.

$$f(8) = 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 20$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} 2x + 4 = 2 \cdot 8 + 4 = 20$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} 3x + 60 - x^2 = 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 20$$

$$\longrightarrow f(8) = \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x)$$

$f(x)$ es continua en $x = 8$

Problema 2A

b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $[0,9]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x + 4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x + 60 - x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Se calcula $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x \cdot (1+x) - (1+x^2) \cdot 1}{(1+x)^2} \\ 2 \\ 3 - 2x \end{cases} \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 1}{(1+x)^2} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si } 4 < x < 8 \\ 3 - 2x & \text{si } 8 < x \leq 9 \end{cases}$$

Se resuelve $f'(x) = 0$:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 1}{(1+x)^2} = 0 \longrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} \in 0 \leq x < 4 \\ x = -1 - \sqrt{2} \notin 0 \leq x < 4 \end{cases} \\ 2 \\ 3 - 2x = 0 \longrightarrow x = \frac{3}{2} \notin 8 < x \leq 9 \end{cases} \quad \text{No válida}$$

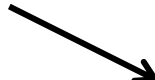
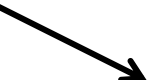
Se hace un estudio de signos de la función derivada en la siguiente diapositiva.

Problema 2A

b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $[0,9]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x+4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x+60-x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Recordamos la función derivada. $f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si } 4 < x < 8 \\ 3-2x & \text{si } 8 < x \leq 9 \end{cases}$

	0	$-1 + \sqrt{2}$	4	8	9
$f'(x)$		-	+	+	-
$f(x)$					

$$f'(0,2) = \frac{(0,2)^2 + 2 \cdot 0,2 - 1}{(1 + 0,2)^2} < 0 \quad f'(0,5) = \frac{(0,5)^2 + 2 \cdot 0,5 - 1}{(1 + 0,5)^2} > 0 \quad f'(6) = 2 > 0 \quad f'(8,5) = 3 - 2 \cdot 8,5 < 0$$

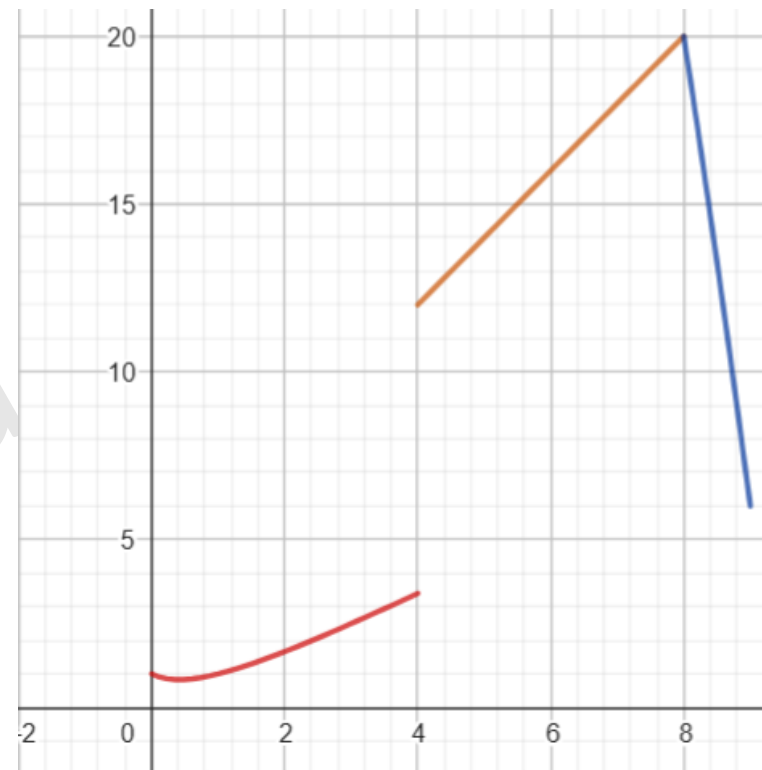
$f(x)$ crece si $x \in (-1 + \sqrt{2}, 8)$ y decrece si $x \in [0, -1 + \sqrt{2}) \cup (8, 9]$

NOTA ACERCA DE LA DEFINICIÓN DE CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN.

Un punto de discontinuidad es aquel donde la función no es continua, como un salto, un agujero o una asíntota vertical. Sin embargo, la función podría comportarse de manera creciente en ese punto, aunque no de forma continua.

Una función es creciente en un punto si, en un entorno de ese punto, los valores de la función son mayores o iguales a medida que se alejan del punto en ambas direcciones. En términos más simples, la función "asciende" a medida que avanzamos en el eje X.

La definición formal de un intervalo creciente es: un intervalo abierto en el eje x de (a, d) donde cada $b, c \in (a, d)$ con $b < c$ tiene $f(b) \leq f(c)$. Por lo que, si aplicamos ésta a nuestra función, podemos observar que es creciente si $x \in (-1 + \sqrt{2}, 8)$ ya que $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow +} f(x)$, y no sólo en $x \in (-1 + \sqrt{2}, 4) \cup (4, 8)$

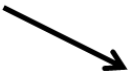


Problema 2A

c) Calcular los puntos donde la función alcanza el máximo y el mínimo, y cuánto vale la función en esos puntos.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x+4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x+60-x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Se utiliza el estudio de signos de la función derivada hecho en el apartado anterior.

	0	$-1 + \sqrt{2}$	4	8	9
$f'(x)$		-	+	+	-
$f(x)$					

Se observa que en $x = -1 + \sqrt{2}$ la función presenta un mínimo relativo y en $x = 8$ presenta un máximo relativo.

Se calcula el máximo y el mínimo local de la función.

$$f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{1 + (-1 + \sqrt{2})^2}{1 + (-1 + \sqrt{2})} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 2 \quad f(8) = 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 20$$

Se calcula el valor de la función en los puntos inicial y final para ver si alguno de ellos es un máximo o mínimo absoluto.

$$f(0) = \frac{1 + 0^2}{1 + 0} = 1 \quad f(9) = 3 \cdot 9 + 60 - 9^2 = 6$$

Máximo absoluto **(8, 20)**

Mínimo absoluto **$(-1 + \sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2)$**

Problema 2A

d) Calcular el área de la región delimitada por esta función, el eje OX , la recta de ecuación $x = 8$ y la recta de ecuación $x = 9$.

Puesto que $f(8)$ y $f(9)$ son ambos positivos, podemos calcular directamente el área bajo a curva mediante una integral.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x + 4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x + 60 - x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

$$\int_8^9 3x + 60 - x^2 dx = \left[3 \cdot \frac{x^2}{2} + 60x - \frac{x^3}{3} \right]_8^9 = 3 \cdot \frac{9^2}{2} + 60 \cdot 9 - \frac{9^3}{3} - \left(3 \cdot \frac{8^2}{2} + 60 \cdot 8 - \frac{8^3}{3} \right) = \frac{79}{6} \text{ u. a.}$$

El área bajo la curva entre $x = 8$, $x = 9$ y el eje OX es **79/6 unidades de área.**



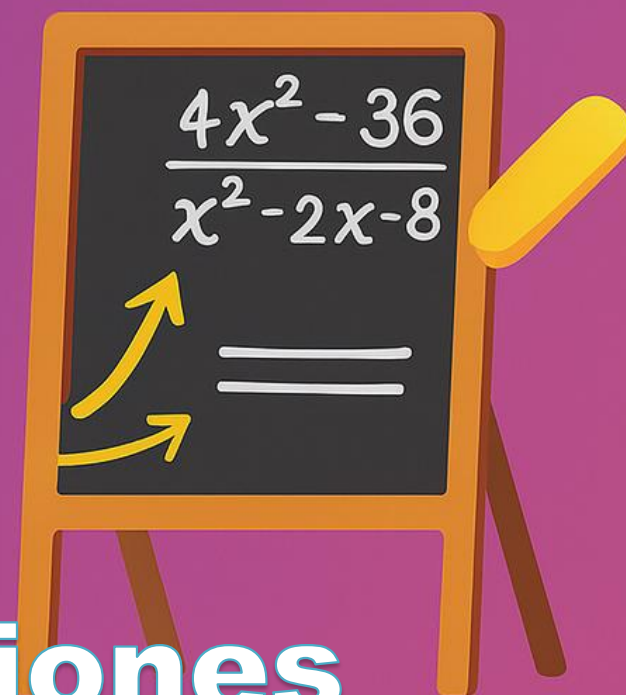
PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS CC.SS.

Problema 2 B
Junio 2025

Análisis de funciones



Problema 2B

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(0,5 puntos)*

www.a.

Problema 2B

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. $f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$

Por ello, el Dominio es: $\text{Dom } f(x) = \mathbf{R - \{-2, 4\}}$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje Y (} x = 0 \text{)} \rightarrow f(0) = \frac{4 \cdot 0^2 - 36}{0^2 - 2 \cdot 0 - 8} = \frac{-36}{-8} = \frac{9}{2} \rightarrow \mathbf{A = \left(0, \frac{9}{2}\right)}$$

$$\text{Eje X (} y = 0 \text{)} \rightarrow \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = 0 \rightarrow 4x^2 - 36 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{36}{4} = 9 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\mathbf{B = (-3, 0)}$$

$$\mathbf{C = (3, 0)}$$

Problema 2B

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los valores de x que están fuera del dominio. En dichos valores, **es posible** que haya una asíntota vertical.

Calculo el límite de la función en $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{-20}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{-20}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{-20}{0^-} = +\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = -2 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

Calculo el límite de la función en $x = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{28}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{28}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{28}{0^+} = +\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = 4 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función en el último apartado.

Problema 2B

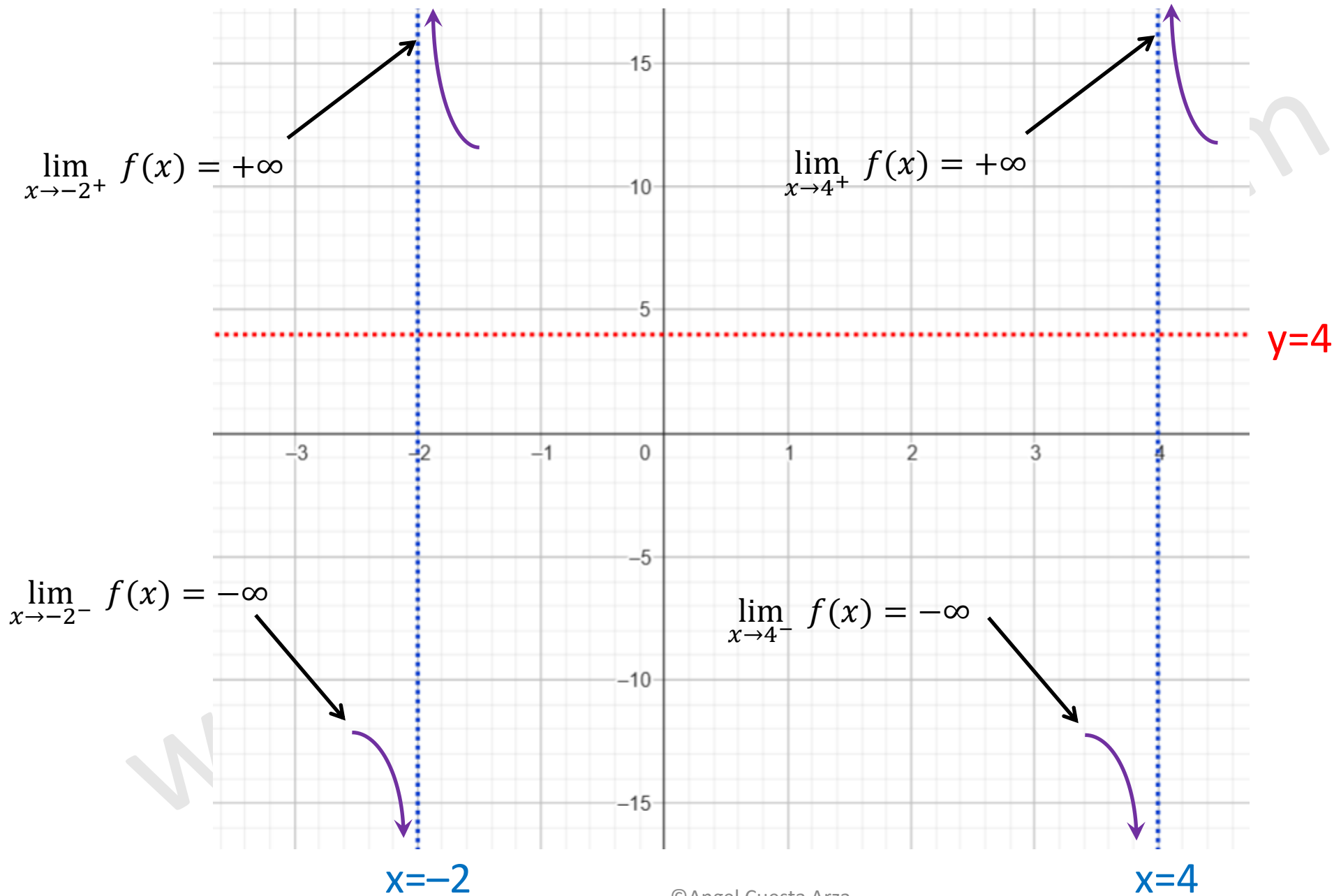
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4,$$

por consiguiente, $y = 4$ es A.H. de $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$



Problema 2B

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. $f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{8x \cdot (x^2 - 2x - 8) - (4x^2 - 36) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{8x^3 - 16x^2 - 64x - 8x^3 + 8x^2 + 72x - 72}{(x^2 - 2x - 8)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-8x^2 + 8x - 72}{(x^2 - 2x - 8)^2}$$

Igualo la derivada a cero: $\frac{-8x^2 + 8x - 72}{(x^2 - 2x - 8)^2} = 0 \rightarrow -8x^2 + 8x - 72 = 0 \rightarrow -x^2 + x - 9 = 0 \rightarrow \nexists x \in R$

Se estudia el signo de la derivada. Compruebo que $f'(x) < 0$ en todo su dominio, ya que $-x^2 + x - 9 < 0, \forall x \in R$

	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$				

$f(x)$ **decrece** en $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 4) \cup (4, +\infty)$

Problema 2B

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. $f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$

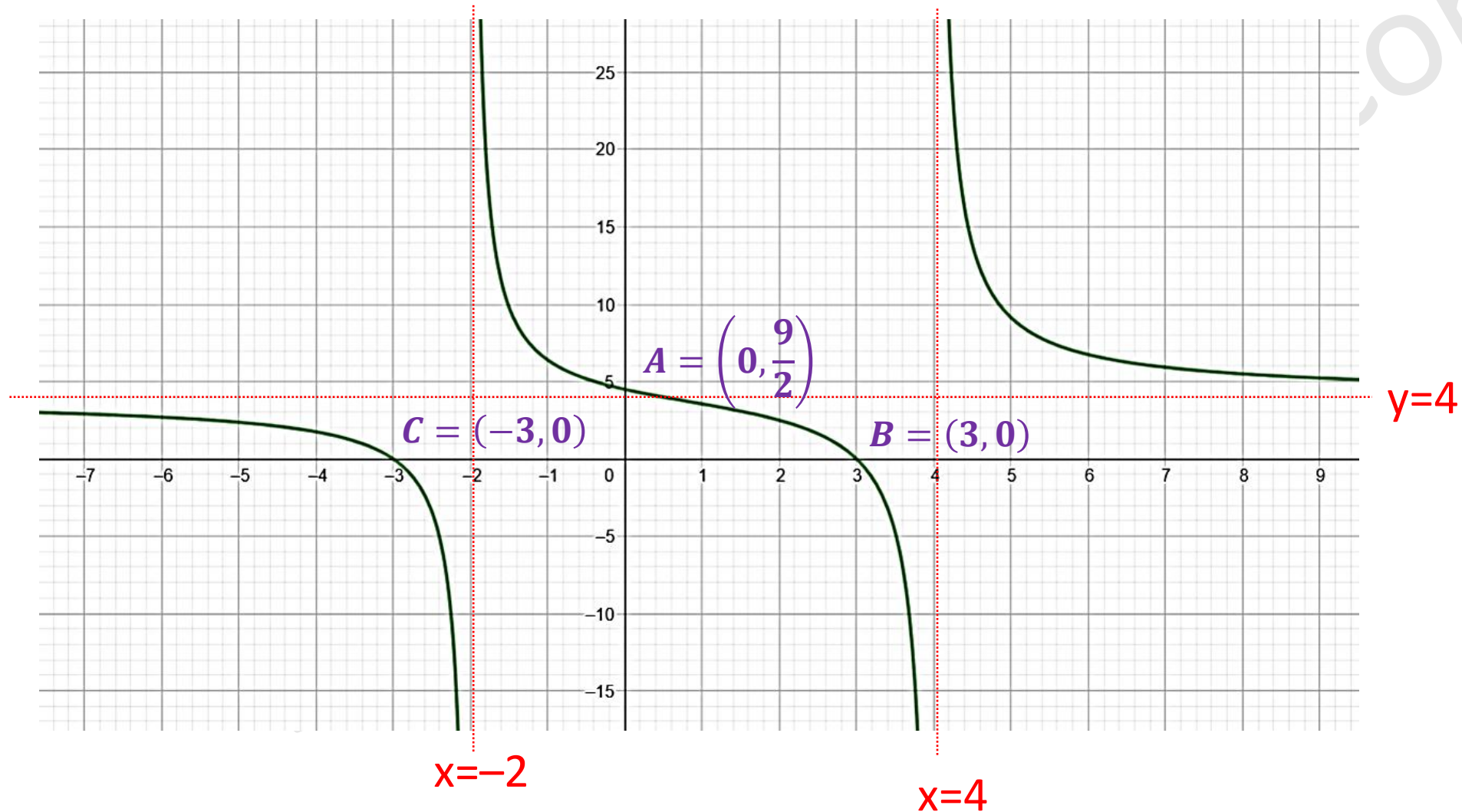
A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$				

La función **no tiene ni máximos ni mínimos locales**.

Problema 2B

d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.





PAU COMUNIDAD VALENCIANA

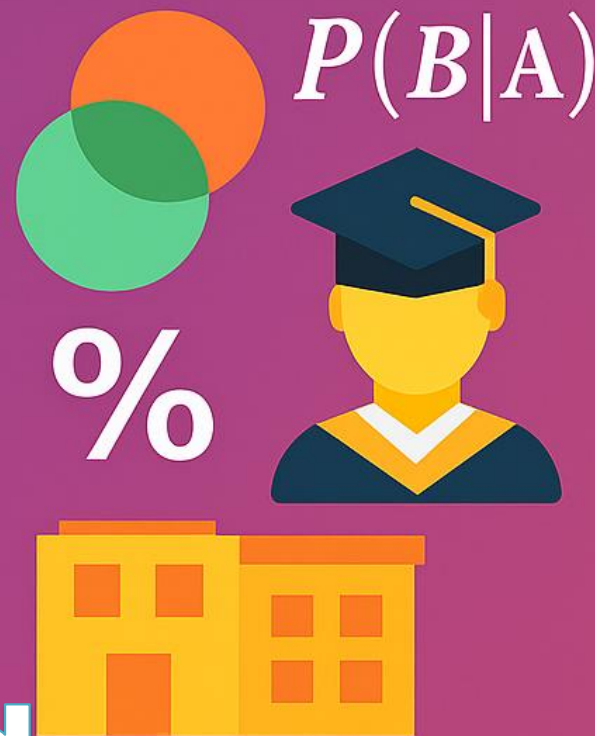


MATEMÁTICAS

CC.SS.

Problema 3
Junio 2025

Probabilidad



Problema 3

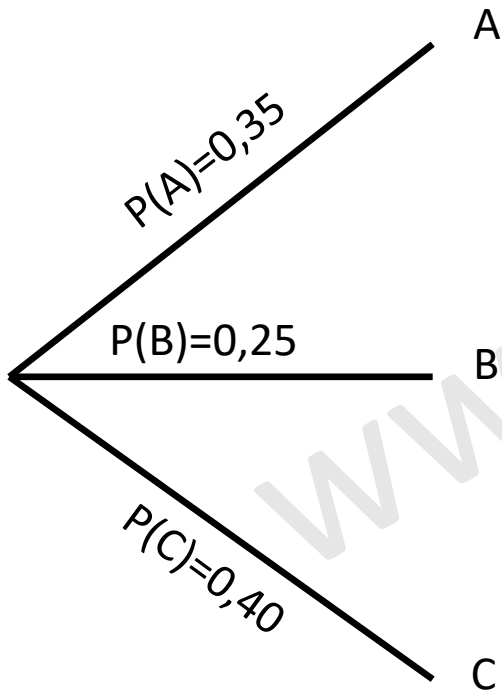
Problema 3. En un país se sabe que un 35% de personas vive en municipios pequeños (10 000 habitantes o menos), un 25% de personas vive en municipios medianos (entre 10 001 y 50 000 habitantes) y un 40% de personas vive en municipios grandes (más de 50 000 habitantes). Entre las personas que viven en municipios pequeños, un 20% se graduó en la universidad; entre las que viven en municipios medianos, un 30% se graduó en la universidad; y entre las que viven en municipios grandes, un 60% se graduó en la universidad. Seleccionamos al azar una persona de este país.

- a) Calcula la probabilidad de que la persona seleccionada se haya graduado en la universidad. *(1 punto)*
- b) Si sabemos que la persona seleccionada se graduó en la universidad, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un municipio con más de 10 000 habitantes. *(1 punto)*
- c) Calcula la probabilidad de la intersección de los sucesos "la persona seleccionada vive en un municipio con 50 000 habitantes o menos" y "la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes". *(1 punto)*

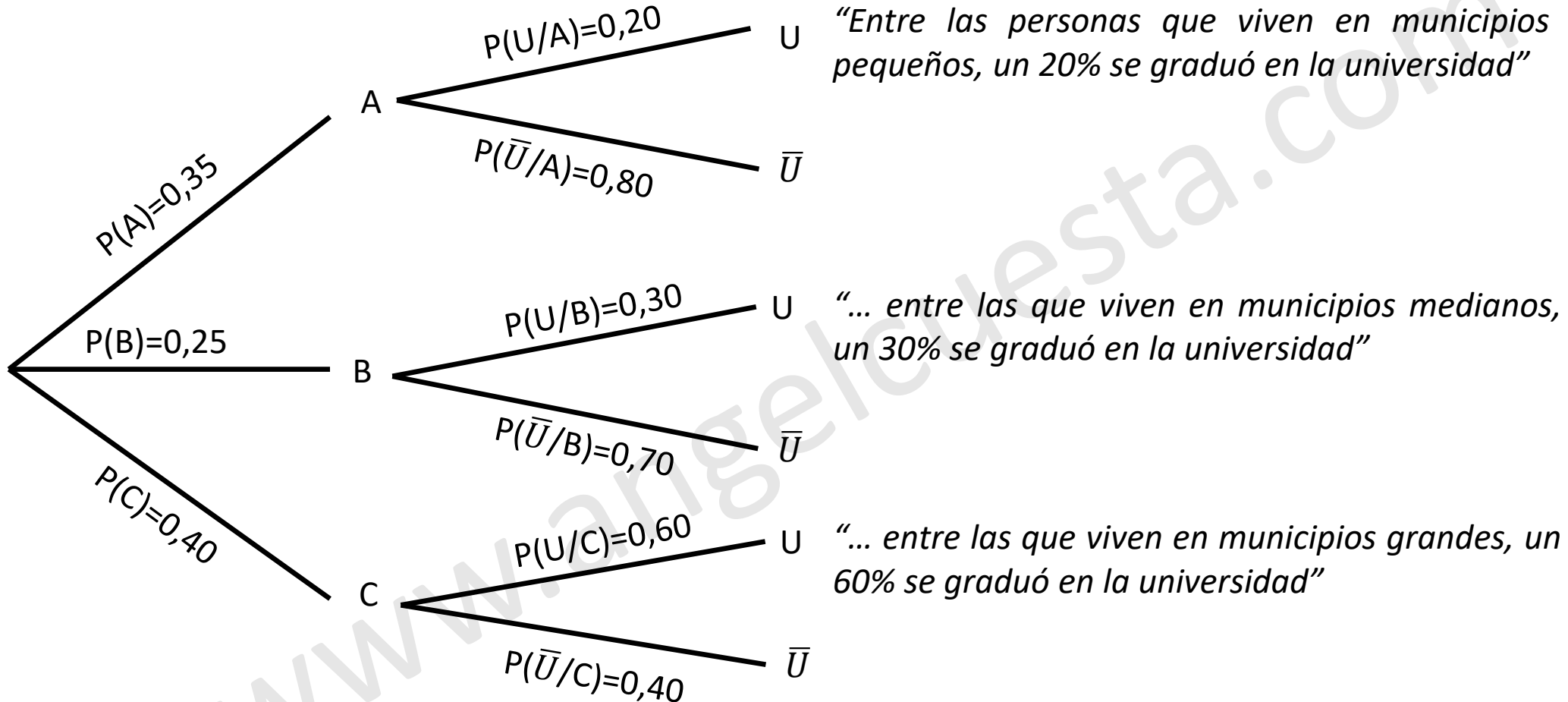
Se definen los sucesos: $A=\{\text{vive en una ciudad pequeña}\}$ $U=\{\text{El alumno se graduó en la universidad}\}$
 $B=\{\text{vive en una ciudad mediana}\}$ $\bar{U}=\{\text{El alumno no se graduó en la universidad}\}$
 $C=\{\text{vive en una ciudad grande}\}$

A partir del enunciado se representan todas las posibilidades mediante un diagrama de árbol.

“En un país se sabe que un 35% de personas vive en municipios pequeños (10 000 habitantes o menos), un 25% de personas vive en municipios medianos (entre 10 001 y 50 000 habitantes) y un 40% de personas vive en municipios grandes (más de 50 000 habitantes).”



Problema 3



Problema 3

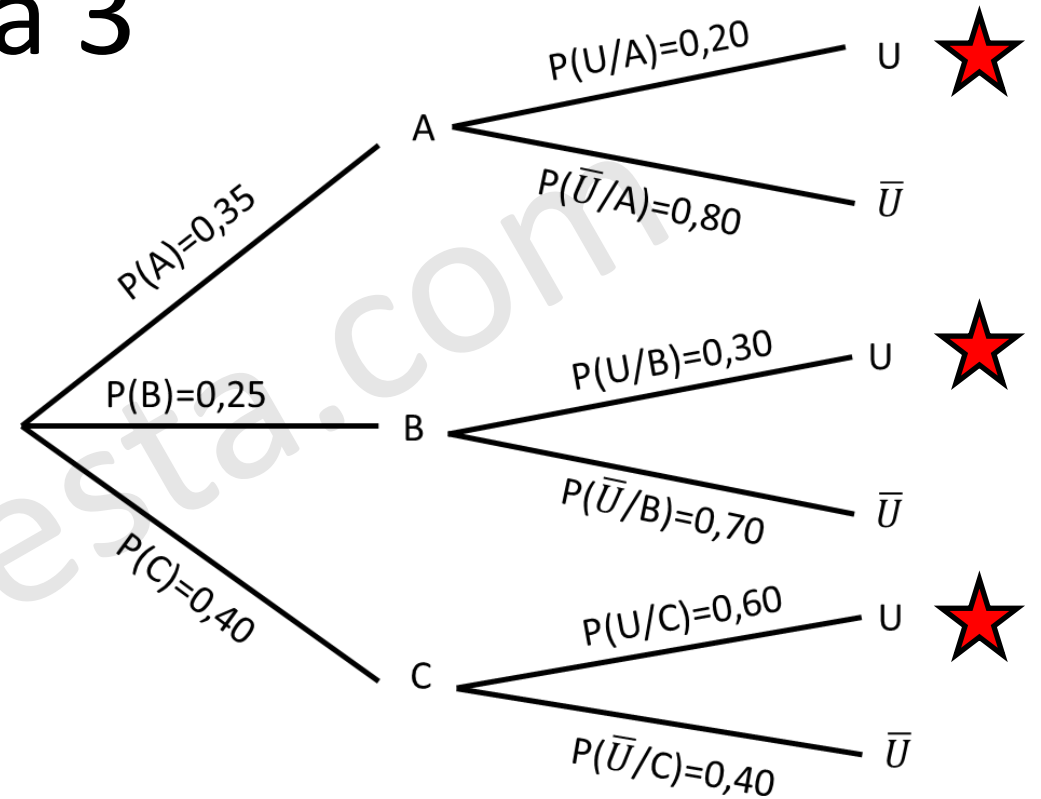
a) Calcula la probabilidad de que la persona seleccionada se haya graduado en la universidad.

Se aplica el teorema de la probabilidad total.

$$P(U) = P(A) \cdot P(U/A) + P(B) \cdot P(U/B) + P(C) \cdot P(U/C)$$

$$P(U) = 0,35 \cdot 0,20 + 0,25 \cdot 0,30 + 0,40 \cdot 0,60 = 0,385$$

La probabilidad de que la persona seleccionada se haya graduado en la universidad es **0,385 (38,5%)**.



Problema 3

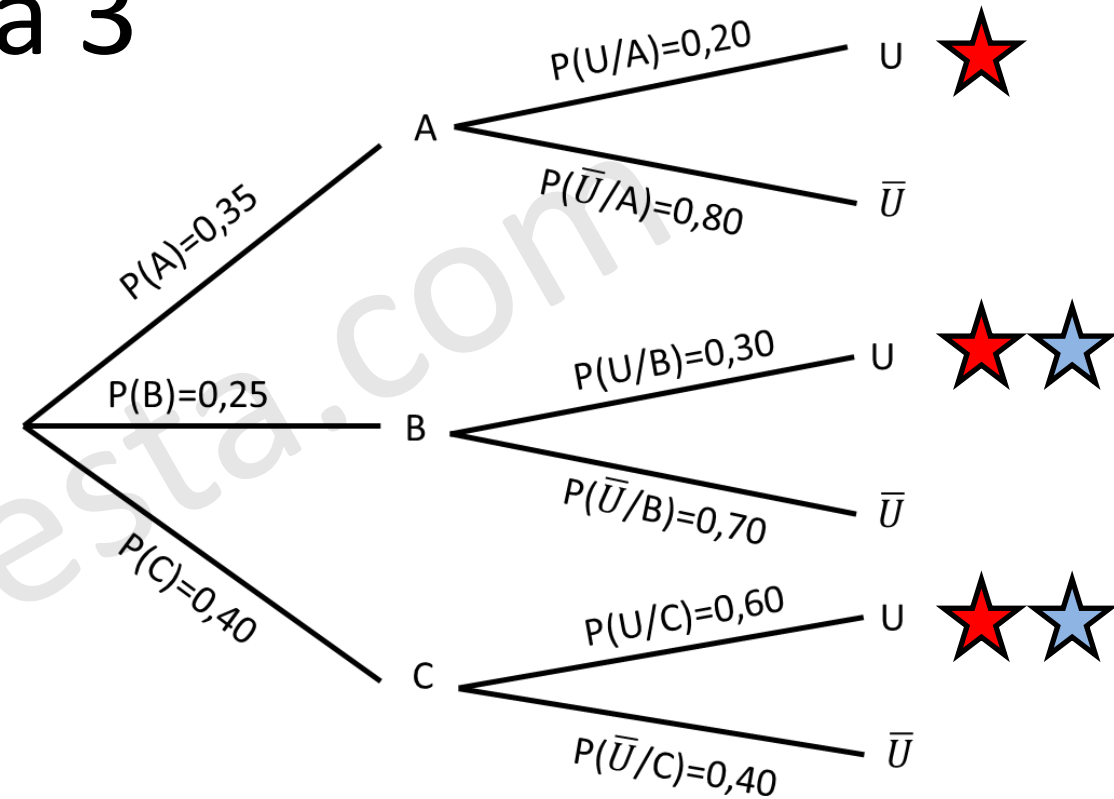
b) Si sabemos que la persona seleccionada se graduó en la universidad, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un municipio con más de 10 000 habitantes?

Nos piden una probabilidad condicionada a posteriori, por ello utilizamos el teorema de Bayes. Debemos tener en cuenta que los sucesos B y C son incompatibles, por ello:

$$P(B \cup C/U) = P(B/U) + P(C/U) = \frac{P(B \cap U)}{P(U)} + \frac{P(C \cap U)}{P(U)}$$

$$P(B \cup C/U) = \frac{P(B) \cdot P(U/B)}{P(U)} + \frac{P(C) \cdot P(U/C)}{P(U)}$$

$$P(B \cup C/U) = \frac{0,25 \cdot 0,30}{0,385} + \frac{0,40 \cdot 0,60}{0,385} = 0,8182$$



Si sabemos que la persona seleccionada se graduó en la universidad, la probabilidad de que viva en un municipio con más de 10 000 habitantes es **0,8182 (81,82%)**.

Problema 3

c) Calcula la probabilidad de la intersección de los sucesos "la persona seleccionada vive en un municipio con 50 000 habitantes o menos" y "la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes".

Se analiza en el diagrama de árbol cuales son las ramas que debemos utilizar para el cálculo.

$$P\left((A \cup B) \cap (U \cup (B \cup C))\right) = P(A \cap U) + P(B)$$

$$P\left((A \cup B) \cap (U \cup (B \cup C))\right) = 0,35 \cdot 0,20 + 0,25 = 0,32$$

La probabilidad de la intersección de los sucesos "la persona seleccionada vive en un municipio con 50 000 habitantes o menos" y "la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes" es **0,32 (32%)**

