

PAU Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS

Modelo 2025

Problema 2B

Análisis de funciones

Problema 2B

El rendimiento, en tanto por ciento, de cierto motor de combustión en función del tiempo de uso (medido en años) viene dado por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{50x}{1+x^2} + 50$$

- a) Calcula cuándo el motor alcanza su rendimiento máximo y cuál es ese rendimiento máximo.
- b) ¿En algún momento el rendimiento del motor es inferior al 50 %?
- c) Si se considera que el motor debe reemplazarse si el rendimiento es inferior al 65 % a partir del primer año, ¿en qué momento debe reemplazarse?

Problema 2B

El rendimiento, en tanto por ciento, de cierto motor de combustión en función del tiempo de uso x (medido en años) viene dado por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{50x}{1+x^2} + 50$$

a) Calcula cuándo el motor alcanza su rendimiento máximo y cuál es ese rendimiento máximo.

Solución: Se estudia la monotonía de la función en su dominio de definición. En este caso, el dominio de la función son todos los valores de x mayores que 0 ya que el denominador no se anula para ningún valor de x .
 $Dom f(x) = x \in [0, +\infty)$

Se calcula la derivada de la función y se iguala a cero.

$$f'(x) = \frac{50 \cdot (1+x^2) - 50x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{50 + 50x^2 - 100x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{50 - 50x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \longrightarrow \frac{50 - 50x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \longrightarrow 50 - 50x^2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Solución no válida ya que no pertenece al dominio de la función.

Problema 2B

El rendimiento, en tanto por ciento, de cierto motor de combustión en función del tiempo de uso x (medido en años) viene dado por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{50x}{1+x^2} + 50$$

a) Calcula cuándo el motor alcanza su rendimiento máximo y cuál es ese rendimiento máximo.

Se hace un estudio de signos de la función derivada.

	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

$$f'(0,5) = \frac{50 - 50 \cdot 0,5^2}{(1 + 0,5^2)^2} > 0$$

$$f'(2) = \frac{50 - 50 \cdot 2^2}{(1 + 2^2)^2} < 0$$

$f(x)$ presenta un máximo relativo en $x = 1$.

Se calcula su valor para $x = 1$. $f(1) = \frac{50 \cdot 1}{1 + 1^2} + 50 = 75 \%$

El máximo rendimiento se alcanza cuando el motor lleva 1 año de funcionamiento y es del 75%.

Problema 2B

b) ¿En algún momento el rendimiento del motor es inferior al 50 %?

Puesto que la función es decreciente desde $x = 1$, cabe la posibilidad de que su rendimiento baje del 50% cuando el valor de x sea lo suficientemente alto. Para saber cuál es el valor mínimo que alcanzará el rendimiento, calculo el límite de la función cuando x tiende a infinito.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{50x}{1+x^2} + 50 \right) = 0 + 50 = 50$$

El límite del cociente tiende a cero porque el orden del infinito del numerador es menor que el del denominador.

Para que se alcance un valor del rendimiento del 50%, debería transcurrir una cantidad de tiempo infinita. Como eso es imposible, podemos afirmar que **el rendimiento del motor nunca será inferior al 50 %**.

También podríamos haber planteado el ejercicio mediante una inecuación:

$$\frac{50x}{1+x^2} + 50 < 50 \longrightarrow \frac{50x}{1+x^2} < 0 \xrightarrow{1+x^2 > 0} 50x < 0 \longrightarrow x < 0$$

Puesto que es imposible que x tome un valor negativo, no existe ningún valor de x que haga que el valor de $f(x)$ sea menor que 50. Podemos afirmar que **el rendimiento del motor nunca será inferior al 50 %**. ©Angel Cuesta Arza

Problema 2B

c) Si se considera que el motor debe reemplazarse si el rendimiento es inferior al 65 % a partir del primer año, ¿en qué momento debe reemplazarse?

Se plantea la inecuación correspondiente a $f(x) < 65$

$$\frac{50x}{1+x^2} + 50 < 65 \longrightarrow \frac{50x}{1+x^2} < 15 \xrightarrow{1+x^2 > 0} 50x < 15 + 15x^2 \longrightarrow 15x^2 - 50x + 15 > 0$$

Se obtienen las soluciones de $15x^2 - 50x + 15 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ x = 3 \end{cases}$

Se hace el estudio de signos de la expresión cuadrática para resolver la inecuación de segundo grado. Al ser positivo el coeficiente del término cuadrático, es fácil deducir los signos de la expresión. Siempre lo puedes comprobar sustituyendo un valor de cada intervalo en la expresión cuadrática.

	0	1/3	3	$+\infty$
		SI	NO	SI
$15x^2 - 50x + 15$		+	-	+

El rendimiento del motor es inferior al 65% durante los primeros cuatro meses y después de los 3 años. Por lo tanto, **se deberá reemplazar el motor a partir de los 3 años.**