# Selectividad Comunidad Valenciana

## Matemáticas CC.SS

## Septiembre 2020



## Problema 2

## Análisis de una función

# El Enunciado

Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ , se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Solución:

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ lo cual implica que el Dominio es: $\boxed{\boldsymbol{Dom\ f(x) = R - \{1\}}}$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ Y(x=0) \rightarrow f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = (0,0)}}$$

$$Eje\ X\ (y=0) \rightarrow \frac{x^2}{x-1} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = (0,0)}}$$

Por ello, la función **sólo tiene un punto de corte con los ejes, A=(0,0).**

# Asíntotas

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en ese punto y lo comprobamos.

**En x=1**; $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{0}\longrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\end{cases}, luego\ \boxed{\boldsymbol{x=1\ es\ A.V.\ de\ f(x)}}$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar mas fácilmente la función en el último apartado.

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite en infinito.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

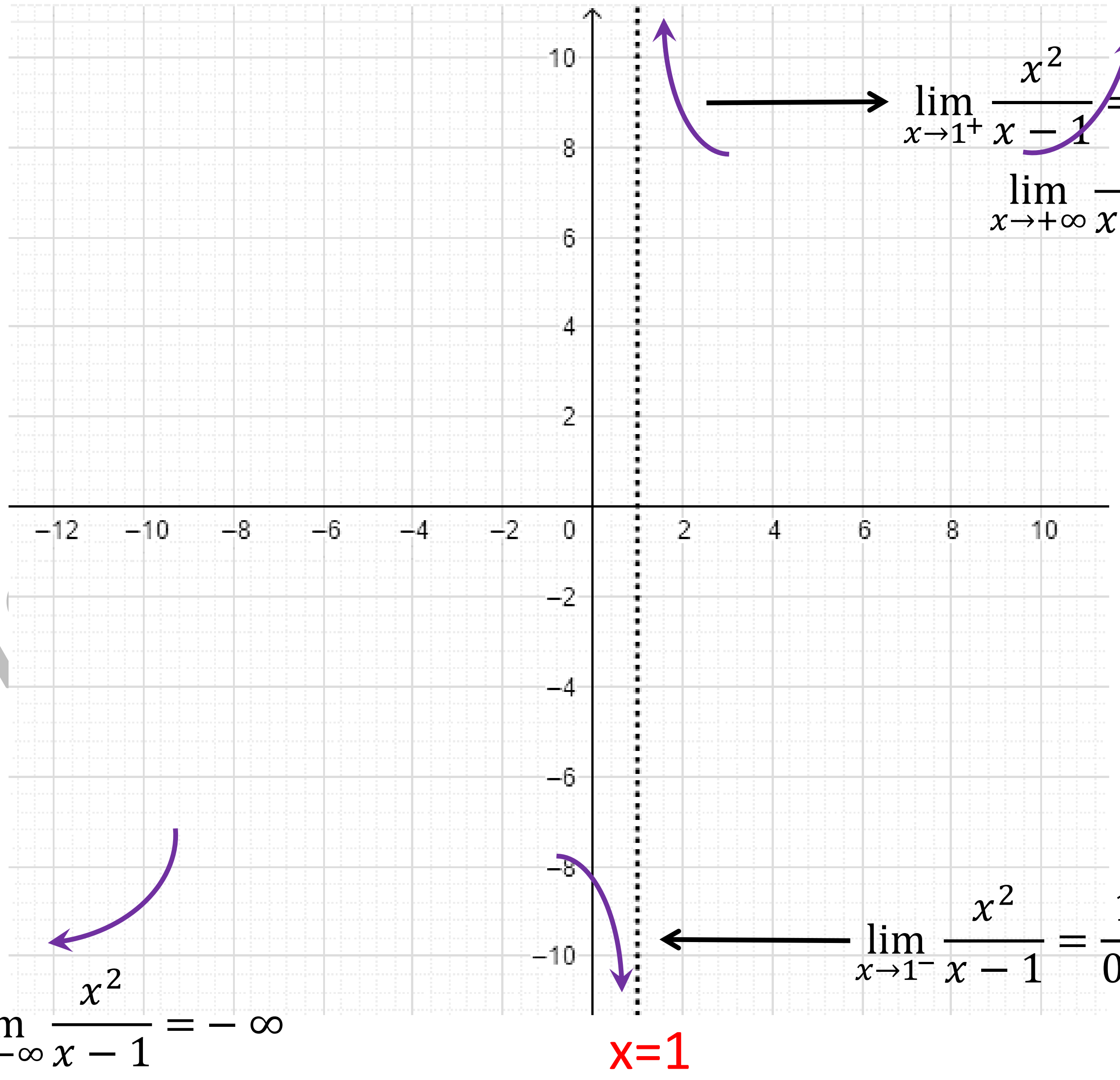
Por lo tanto, f(x) **no presenta asíntota horizontal**. Aunque las ramas infinitas que hemos calculado nos ayudarán en la representación gráfica.

Por otro lado, la función presenta asíntota oblicua, pero no se nos pide que la calculemos. Con las ramas infinitas podremos hacer la representación gráfica sin problema.

# Esbozo Asíntotas

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x-1}=+\infty$$




$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$$

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.

# Estudio de la monotonía

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \longrightarrow x^2 - 2x = 0 \longrightarrow x \cdot (x-2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Se estudia el signo de la derivada:

| | $-\infty$ a $0$ | $0$ a $1$ | $1$ a $2$ | $2$ a $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | − | − | + |
| f(x) | ↗ | ↘ | ↘ | ↗ |

f(x) es **creciente** en $x \epsilon (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y **decreciente** en $x \epsilon (0,1) \cup (1,2)$.

# Máximos y mínimos

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

| | $-\infty$ … 0 | 0 … 1 | 1 … 2 | 2 … $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | − | − | + |
| f(x) | ↗ | ↘ | ↘ | ↗ |

Se observa en el cuadro que la función tiene un mínimo relativo **(x=2)** y un máximo relativo **(x=0)**.

**Mínimo:** $\left(2, f(2)\right) = (\mathbf{2}, \mathbf{4})$

**Máximo:** $\left(0, f(0)\right) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$

$$f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

$$f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0$$

# Representación Gráfica