Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS
Septiembre 2020

Problema 4
Matrices y determinantes

El enunciado/Matriz inversa

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula $(A \cdot B)^{-1}$.

b) Calcula $C + A \cdot B$

c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = (C + A \cdot B)^{-1}$?

Solución: Calculo el producto de A y B. Al resultado de dicho producto, le asignaré la matriz D.

$$D = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculo la matriz inversa por el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|D| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1 \neq 0 \rightarrow La\ matriz\ tiene\ inversa$

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $\left(Adj(D)\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $(D)^{-1} = \frac{1}{|D|}(Adj(D))^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{Solución:}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}$

Cálculo

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula $(A \cdot B)^{-1}$.

b) Calcula $C + A \cdot B$

c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = (C + A \cdot B)^{-1}$?

Solución:

Basta con sumar las matrices, ya que el producto de A y B ya lo he calculado anteriormente.

$$C + A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $\boldsymbol{C + A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Calculo primero la parte derecha de la igualdad. $(C + A \cdot B)^{-1} = I^{-1} = \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Calculo ahora la parte izquierda de la igualdad. Me falta calcular la matriz inversa de C.

Cálculo

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(C + A \cdot B)^{-1} = I^{-1} = \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = (C + A \cdot B)^{-1}$?

Calculo la matriz inversa de C por el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1 \neq 0 \rightarrow \textit{La matriz tiene inversa}$

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $\left(Adj(C)\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $(C)^{-1} = \frac{1}{|C|}(Adj(C))^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Calculo la suma pedida.

$C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Como se puede comprobar, $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = (C + A \cdot B)^{-1}$ es una igualdad que se cumple en este caso.