

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Septiembre 2020



Problema 1

Problema de sistemas de ecuaciones

El Enunciado

Una fábrica de juguetes artesanales produce camiones, marionetas y rompecabezas de madera. Para fabricar un camión necesita dos kilos de madera y tres horas de trabajo, mientras que para una marioneta necesita quinientos gramos de madera y cuatro horas de trabajo. En el caso de los rompecabezas necesita ochocientos gramos de madera y tres horas y media de trabajo para producir uno. Durante una semana, la empresa ha puesto en el mercado 89 juguetes utilizando exactamente 91 kilos de madera y 313 horas de trabajo. Determina el número de camiones, de marionetas y de rompecabezas producidos.

Solución: En primer lugar se definen las incógnitas del problema.

x =número de camiones.

y =número de marionetas.

z =número de rompecabezas.

Resumimos los datos del problema en una tabla.

	Kg de madera	Horas de trabajo
Fabricar x camiones	$2x$	$3x$
Fabricar y marionetas	$0'5y$	$4y$
Fabricar z rompecabezas	$0'8z$	$3'5z$
DISPONIBILIDAD	91	313

“Para fabricar un camión necesita **dos kilos de madera y tres horas de trabajo**”

“para una marioneta necesita **quinientos gramos de madera y cuatro horas de trabajo**”

“los rompecabezas necesita **ochocientos gramos de madera y tres horas y media de trabajo** para producir uno”

“juguetes utilizando exactamente **91 kilos de madera y 313 horas de trabajo**”

Planteamiento

Se plantean ahora las ecuaciones que define el enunciado.

“la empresa ha puesto en el mercado 89 juguetes” $\longrightarrow x + y + z = 89$

“utilizando exactamente 91 kilos de madera” $\longrightarrow 2x + 0'5y + 0'8z = 91$

“y 313 horas de trabajo” $\longrightarrow 3x + 4y + 3'5z = 313$

	Kg de madera	Horas de trabajo
Fabricar x camiones	2x	3x
Fabricar y marionetas	0'5y	4y
Fabricar z rompecabezas	0'8z	3'5z
DISPONIBILIDAD	91	313

Quedando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 89 \\ 2x + 0'5y + 0'8z = 91 \\ 3x + 4y + 3'5z = 313 \end{cases}$$

Resolveré el sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 89 & 1 & 1 \\ 91 & 0'5 & 0'8 \\ 313 & 4 & 3'5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0'5 & 0'8 \\ 3 & 4 & 3'5 \end{vmatrix}} = \frac{10'35}{0'45} = \mathbf{23} \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 89 & 1 \\ 2 & 91 & 0'8 \\ 3 & 313 & 3'5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0'5 & 0'8 \\ 3 & 4 & 3'5 \end{vmatrix}} = \frac{11'7}{0'45} = \mathbf{26} \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 89 \\ 2 & 0'5 & 91 \\ 3 & 4 & 313 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0'5 & 0'8 \\ 3 & 4 & 3'5 \end{vmatrix}} = \frac{18}{0'45} = \mathbf{40}$$

$$x = \mathbf{23} \quad y = \mathbf{26} \quad z = \mathbf{40}$$

Solución: las piezas producidas han sido **23 camiones, 26 marionetas y 40 rompecabezas.**

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Septiembre 2020



Problema 2

Análisis de una función

El Enunciado

Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) Los máximos y mínimos locales.
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Solución:

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \quad \text{lo cual implica que el Dominio es: } \boxed{\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}}$$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje Y (} x = 0 \text{)} \rightarrow f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0 \rightarrow \boxed{A = (0, 0)}$$

$$\text{Eje X (} y = 0 \text{)} \rightarrow \frac{x^2}{x-1} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \boxed{A = (0, 0)}$$

Por ello, la función **sólo tiene un punto de corte con los ejes, A=(0,0).**

Asíntotas

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en ese punto y lo comprobamos.

En $x=1$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0}$ $\longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$, luego $x = 1$ es A.V. de $f(x)$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar mas fácilmente la función en el último apartado.

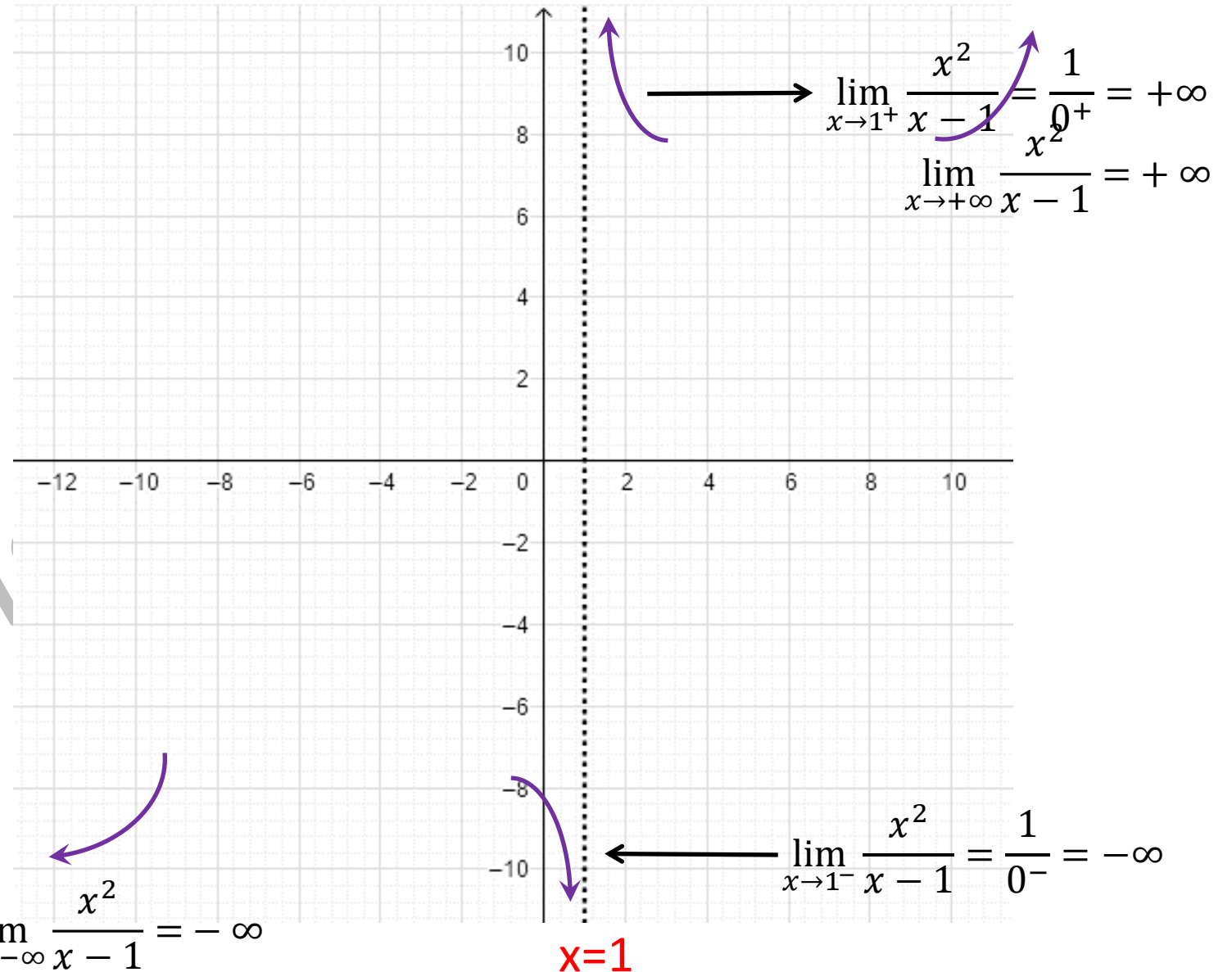
La **asíntota horizontal** se calcula con el límite en infinito.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Por lo tanto, $f(x)$ **no presenta asíntota horizontal**. Aunque las ramas infinitas que hemos calculado nos ayudarán en la representación gráfica.

Por otro lado, la función presenta asíntota oblicua, pero no se nos pide que la calculemos. Con las ramas infinitas podremos hacer la representación gráfica sin problema.

Esbozo Asíntotas



Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.

Estudio de la monotonía

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x - 1) - (x^2) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = 0 \longrightarrow x^2 - 2x = 0 \longrightarrow x \cdot (x - 2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Se estudia el signo de la derivada:

	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	-	+
$f(x)$					

$f(x)$ es **creciente** en $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y **decreciente** en $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$.

Máximos y mínimos

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		-		+
$f(x)$					

Se observa en el cuadro que la función tiene un mínimo relativo ($x=2$) y un máximo relativo ($x=0$).

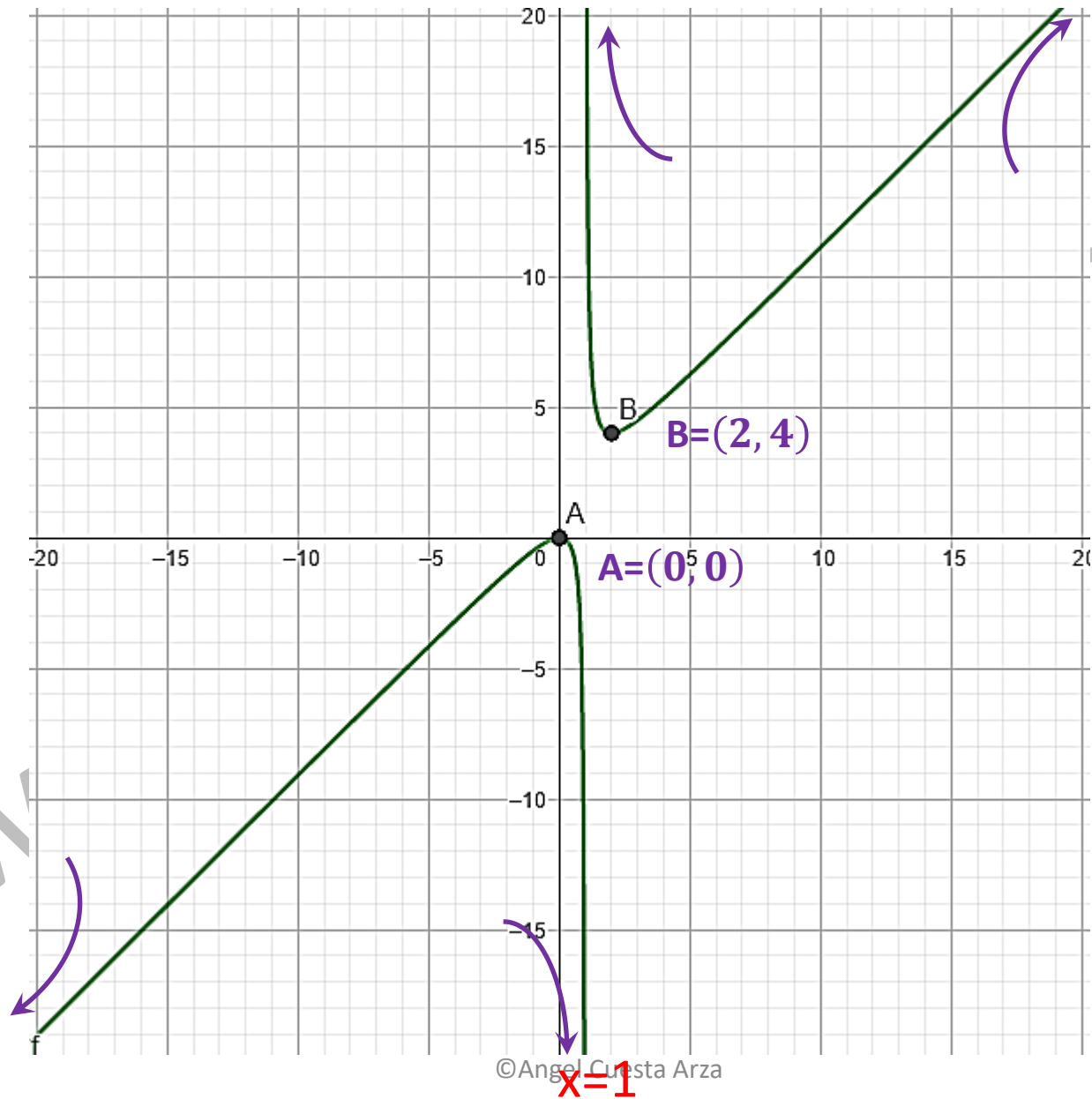
Mínimo: $(2, f(2)) = (2, 4)$

$$f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

Máximo: $(0, f(0)) = (0, 0)$

$$f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0$$

Representación Gráfica



Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS
Septiembre 2020



Problema 3 Probabilidad

Resolviendo el problema

De dos sucesos A y B se sabe que satisfacen que $P(A)=0,4$, $P(A \cup B)=0,8$ y $P(A^c \cup B^c)=0,7$, donde A^c y B^c representan los sucesos complementarios de los sucesos A y B, respectivamente. Se pide:

- a) ¿Son independientes los sucesos A y B?
- b) La probabilidad de que solo se verifique uno de los sucesos.
- c) La probabilidad de que se verifique el suceso B^c .
- d) La probabilidad de que se verifique el suceso A^c/B .

Solución:

Dos sucesos son independientes si verifican la ecuación:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Como se puede ver, debemos calcular $P(B)$ y $P(A \cap B)$

Según la segunda ley de Morgan: $P(A^c \cup B^c) = P[(A \cap B)^c] = 0,7$

Según la complementariedad de sucesos: $P[(A \cap B)^c] = 1 - P(A \cap B) \longrightarrow 0,7 = 1 - P(A \cap B) \longrightarrow P(A \cap B) = 0,3$

Según la propiedad de la unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \longrightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$

$$P(B) = 0,8 - 0,4 + 0,3 = 0,7$$

Ya puedo comprobar si se cumple la propiedad: $P(A \cap B) = 0,3$

$$P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28$$

Como $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, los sucesos A y B no son independientes.

Resolviendo el problema

b) La probabilidad de que solo se verifique uno de los sucesos.

Se calcula la probabilidad de que solo se verifique el suceso A. $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = 0'4 - 0'3 = 0'1$

Se calcula la probabilidad de que solo se verifique el suceso B. $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0'7 - 0'3 = 0'4$

La probabilidad de que solo se verifique uno de los sucesos: $P(A \cap B^C) + P(A^C \cap B) = 0'1 + 0'4 = 0'5$

La probabilidad de que solo se verifique uno de los sucesos es **0'5**.

c) La probabilidad de que se verifique el suceso B^C .

Según la complementariedad de sucesos: $P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - 0'7 = 0'3$

La probabilidad de que se verifique el suceso B^C es **0'3**.

d) La probabilidad de que se verifique el suceso A^C/B .

Se aplica la fórmula de la probabilidad condicionada.

$$P(A^C/B) = \frac{P(A^C \cap B)}{P(B)} = \frac{0'4}{0'7} = \frac{4}{7}$$

La probabilidad de que se verifique el suceso A^C/B es **4/7**.

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS
Septiembre 2020



Problema 4

Matrices y determinantes

El enunciado/Matriz inversa

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Calcula $(A \cdot B)^{-1}$.
- b) Calcula $C + A \cdot B$
- c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = (C + A \cdot B)^{-1}$?

Solución: Calculo el producto de A y B. Al resultado de dicho producto, le asignaré la matriz D.

$$D = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculo la matriz inversa por el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|D| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1 \neq 0 \rightarrow \text{La matriz tiene inversa}$

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $(Adj(D))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $(D)^{-1} = \frac{1}{|D|} (Adj(D))^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: $(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Cálculo

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula $(A \cdot B)^{-1}$.

b) Calcula $C + A \cdot B$

c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = (C + A \cdot B)^{-1}$?

Solución:

Basta con sumar las matrices, ya que el producto de A y B ya lo he calculado anteriormente.

$$C + A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } C + A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculo primero la parte derecha de la igualdad. $(C + A \cdot B)^{-1} = I^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculo ahora la parte izquierda de la igualdad. Me falta calcular la matriz inversa de C.

Cálculo

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(C + A \cdot B)^{-1} = I^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = (C + A \cdot B)^{-1}$?

Calculo la matriz inversa de C por el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1 \neq 0 \rightarrow$ La matriz tiene inversa

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $(Adj(C))^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $(C)^{-1} = \frac{1}{|C|} (Adj(C))^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculo la suma pedida.

$$C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como se puede comprobar, $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = (C + A \cdot B)^{-1}$ es una igualdad que se cumple en este caso.

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Septiembre 2020



Problema 5

Optimización de una función cuadrática

El enunciado

Una tienda de alquiler de bicicletas dispone mensualmente de 350 bicicletas. Haciendo un estudio entre los ingresos y los costes de explotación se ha determinado que los beneficios mensuales, en euros, se ajustan a la función

$$f(x) = 350x - x^2 - 15000$$

siendo x el número de bicicletas alquiladas en un mes.

- a) Calcula el número de bicicletas que hay que alquilar cada mes para obtener un beneficio máximo.
- b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo?
- c) Determina a partir de qué cantidad de bicicletas alquiladas el taller obtiene beneficios.
- d) ¿Puede tener pérdidas a pesar de alquilar una cantidad mayor de bicicletas que la obtenida en el apartado anterior?

Puesto que la función es cuadrática y el coeficiente del término cuadrático es negativo, sabemos que el máximo está en el vértice.

$$f(x) = -x^2 + 350x - 15000 \quad \text{Siendo: } a=-1; b=350; c=-15000$$

$$v_x = \frac{-b}{2a} \longrightarrow v_x = \frac{-350}{2 \cdot (-1)} = 175$$

Para que el beneficio sea máximo, debe alquilar 175 bicicletas

Para calcular el beneficio máximo se sustituye en la función beneficio $x=175$

$$f(175) = -175^2 + 350 \cdot 175 - 15000 = 15625$$

Si alquila 175 bicicletas, tendrá un beneficio de 15625 €.

También se podría haber resuelto el ejercicio con ayuda de las derivadas. Hazlo por ti mismo y comprueba que se obtiene el mismo resultado. Puedes revisar el procedimiento en el video del examen de **Julio de 2020, problema 5.**

Resolución

c) Determina a partir de qué cantidad de bicicletas alquiladas el taller obtiene beneficios. $f(x) = -x^2 + 350x - 15000$

Para obtener beneficios, $f(x) > 0$ $-x^2 + 350x - 15000 > 0$

Se calculan los ceros de la función cuadrática. $-x^2 + 350x - 15000 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 50 \\ x_2 = 300 \end{cases}$

Se estudia el signo de la función:

x	0	50	300	$+\infty$
f(x)		-	+	-

$$f(1) = -1^2 + 350 \cdot 1 - 15000 < 0$$

$$f(100) = -100^2 + 35 \cdot 100 - 15000 > 0$$

$$f(400) = -400^2 + 35 \cdot 400 - 15000 < 0$$

Es decir, la función $f(x)$ es positiva cuando x está comprendida entre 50 y 300

El beneficio mensual será positivo cuando se alquilen más de 50 bicicletas (es decir, 51 o más), pero menos de 300 (es decir 299).

d) ¿Puede tener pérdidas a pesar de alquilar una cantidad mayor de bicicletas que la obtenida en el apartado anterior?. Si, si alquila más de 300.

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS
Septiembre 2020



Problema 6
Probabilidad

El enunciado

En una determinada ciudad, se sabe que el 80% de los hogares están formados por más de una persona. Se sabe también que el 30% de los hogares de esa ciudad están suscritos al canal Panoramix. Por último, se sabe que el 20% de los hogares están formados por más de una persona y están suscritos al canal Panoramix. Seleccionamos al azar un hogar de esta ciudad.

- a) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado no esté suscrito al canal Panoramix.
- b) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado esté formado por una única persona y también esté suscrito al canal Panoramix.
- c) Si sabemos que el hogar seleccionado está formado por una única persona, ¿cuál es la probabilidad de que esté suscrito al canal Panoramix?
- d) Si sabemos que el hogar seleccionado está suscrito al canal Panoramix, ¿cuál es la probabilidad de que esté formado por más de una persona?

Solución: Primero asignamos una letra a cada suceso.

A = el hogar está formado por más de una persona.

B = el hogar está suscrito al canal Panoramix.

Tomamos datos del enunciado.

“el 80% de los hogares están formados por más de una persona” → $P(A) = 0'80$ → $P(\bar{A}) = 0'20$

“el 30% de los hogares de esa ciudad están suscritos al canal Panoramix.” → $P(B) = 0'30$ → $P(\bar{B}) = 0'70$

“el 20% de los hogares están formados por más de una persona y están suscritos al canal Panoramix.” → $P(A \cap B) = 0'20$

A partir de estos datos, representaremos los datos en una tabla de contingencia.

Tabla de contingencia

"el 80% de los hogares están formados por más de una persona" $\rightarrow P(A) = 0'80 \longrightarrow P(\bar{A}) = 0'20$

"el 30% de los hogares de esa ciudad están suscritos al canal Panoramix." $\rightarrow P(B) = 0'30 \longrightarrow P(\bar{B}) = 0'70$

"el 20% de los hogares están formados por más de una persona y están suscritos al canal Panoramix." $\rightarrow P(A \cap B) = 0'20$

	A	$\bar{A}$	
B	0'20	0'10	0'30
$\bar{B}$	0'60	0'10	0'70
	0'80	0'20	1

a) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado no esté suscrito al canal Panoramix.

Se calcula a partir de los datos del enunciado: $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0'30 = 0'70$

La probabilidad de que el hogar seleccionado no esté suscrito al canal Panoramix es **0'70**.

b) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado esté formado por una única persona y también esté suscrito al canal Panoramix.

Se toma el dato de la tabla. $P(\bar{A} \cap B) = 0'10$

la probabilidad de que el hogar seleccionado esté formado por una única persona y también esté suscrito al canal Panoramix es **0'10**.

Resolviendo el problema

	A	$\bar{A}$	
B	0'20	0'10	0'30
$\bar{B}$	0'60	0'10	0'70
	0'80	0'20	1

c) Si sabemos que el hogar seleccionado está formado por una única persona, ¿cuál es la probabilidad de que esté suscrito al canal Panoramix?

Aplicamos la definición de probabilidad condicionada. Tomamos datos de la tabla.

$$P(B / \bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0'10}{0'20} = 0'5$$

Si sabemos que el hogar seleccionado está formado por una única persona, la probabilidad de que esté suscrito al canal Panoramix es de **0'5**.

d) Si sabemos que el hogar seleccionado está suscrito al canal Panoramix, ¿cuál es la probabilidad de que esté formado por más de una persona?

Aplicamos la definición de probabilidad condicionada. Tomamos datos de la tabla.

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0'20}{0'30} = \frac{2}{3}$$

Si sabemos que el hogar seleccionado está suscrito al canal Panoramix, la probabilidad de que esté formado por más de una persona es **2/3**.