

PRUEBA DE ACCESO A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR



ARAGÓN



MATEMÁTICAS
JUNIO 2019

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este examen son:

Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Problema.

Geometría.

Probabilidad.

Función a trozos. Estudio.

Estadística bidimensional.



Ejercicio 1

En un camping tienen 3 tipos de cabañas: A, B y C. Las de tipo A tienen una capacidad para 2 personas y su precio por noche es de 80 euros, las de tipo B tienen una capacidad para 4 personas y su precio por noche es de 110 euros y las de tipo C tienen una capacidad para 6 personas y su precio por noche es de 150 euros. Un día que están llenas todas las cabañas hay alojadas 112 personas y el camping recauda por ello 3190 euros. Si se sabe que hay una cabaña más de tipo B que la suma de las cabañas de tipo A y C, ¿cuántas cabañas hay de cada tipo?

Solución: En primer lugar se definen las incógnitas.

x =nº de cabañas tipo A; y =nº de cabañas tipo B y z =nº de cabañas tipo C.

$$\begin{array}{lcl} \text{"Un día que están llenas todas las cabañas hay alojadas 112 personas"} & \longrightarrow & 2x + 4y + 6z = 112 \\ \text{"el camping recauda por ello 3190 euros"} & \longrightarrow & 80x + 110y + 150z = 3190 \\ \text{"Si se sabe que hay una cabaña más de tipo B que la suma de las cabañas de tipo A y C"} & \longrightarrow & y = x + z + 1 \end{array}$$

En primer lugar, trasladamos las incógnitas al lado izquierdo de las igualdades.

$$\begin{array}{lcl} 2x + 4y + 6z = 112 & \xrightarrow{:2} & x + 2y + 3z = 56 \\ 80x + 110y + 150z = 3190 & \xrightarrow{:10} & 8x + 11y + 15z = 319 \\ x - y + z = -1 & & x - y + z = -1 \end{array}$$

Resolveré el sistema mediante el método de Gauss. ©Angel Cuesta Arza

Ejercicio 1

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 56 \\ 8x + 11y + 15z = 319 \\ x - y + z = -1 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 56 \\ 8 & 11 & 15 & 319 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - 8F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 56 \\ 0 & -5 & -9 & -129 \\ 0 & -3 & -2 & -57 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = 5F_3 - 3F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 56 \\ 0 & -5 & -9 & -129 \\ 0 & 0 & 17 & 102 \end{pmatrix} \longrightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 56 \\ -5y - 9z = -129 \\ 17z = 102 \end{array} \right\}$$

Repasa el método de Gauss con mi curso de matrices y determinantes.

https://youtu.be/6zp_EZKz9HY

Minuto 7:00

Una vez el sistema está escalonado, ya podemos resolver:

$$17z = 102 \longrightarrow z = 6$$

$$-5y - 9z = -129 \longrightarrow -5y - 9 \cdot 6 = -129 \longrightarrow y = \frac{-129 + 54}{-5} = 15$$

$$x + 2y + 3z = 56 \longrightarrow x + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 6 = 56 \longrightarrow x = 8$$

Hay **8 cabañas tipo A**, **15 cabañas tipo B** y **6 cabañas tipo C**.

Ejercicio 2

Dados los puntos $A(-2,0)$, $B(4,1)$, $C(4,-1)$:

- a) Hallar el perímetro del triángulo que forman los tres puntos.
- b) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto C y es paralela a la recta que forman los puntos A y B.
- c) Halla la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a la recta que forman los puntos A y B.

Solución:

El perímetro es la suma de los lados del triángulo. Para ello debo calcular la distancia entre los vértices. La distancia entre dos puntos se calcula como el módulo del vector que definen.

Calculo los vectores que definen los 3 lados del triángulo. Y sus módulos.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A = (4,1) - (-2,0) = (6,1) & |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37} \\ \overrightarrow{AC} &= C - A = (4,-1) - (-2,0) = (6,-1) & |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{6^2 + (-1)^2} = \sqrt{37} \\ \overrightarrow{BC} &= C - B = (4,-1) - (4,1) = (0,-2) & |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2\end{aligned}$$

Calculo el perímetro de este triángulo, que es isósceles:

$$P = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{37} + \sqrt{37} + 2 = 2 \cdot \sqrt{37} + 2 \approx 14'17 \text{ unidades}$$

El perímetro del triángulo es $2 \cdot \sqrt{37} + 2$ unidades.

Ejercicio 2

Dados los puntos A(-2,0), B(4,1), C(4,-1):

b) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto C y es paralela a la recta que forman los puntos A y B.

Calculo la pendiente entre los puntos A y B y después la ecuación de la recta.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0}{4 - (-2)} = \frac{1}{6}$$

$$y - y_C = m \cdot (x - x_C) \longrightarrow y - (-1) = \frac{1}{6} \cdot (x - 4) \longrightarrow y = \frac{1}{6}x - \frac{5}{3}$$

$$\text{La ecuación de la recta es: } y = \frac{1}{6}x - \frac{5}{3}$$

c) Halla la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a la recta que forman los puntos A y B.

Calculo la pendiente perpendicular a la recta anterior.

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{1/6} = -6$$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \longrightarrow y - 0 = -6 \cdot (x - 0) \longrightarrow y = -6x$$

$$\text{La ecuación de la recta es: } y = -6x$$

Ejercicio 3

En un crucero viajan turistas de tres nacionalidades, rusos, chinos y japoneses. El 30% de los viajeros son chinos, el 10% japoneses y el resto rusos. En el barco hay tres tipos de camarotes según la categoría: estándar, especial y lujo. De los turistas rusos el 40% viajan en camarote estándar, el 50% en camarote especial y el resto en camarote de lujo. De los chinos la mitad viajan en camarote especial y el resto en camarote de lujo. Los japoneses viajan todos en camarote estándar.

Se elige un pasajero al azar del crucero:

- a) Calcular la probabilidad de que el pasajero sea ruso.
- b) Calcular la probabilidad de que el pasajero sea ruso y viaje en camarote de categoría estándar.
- c) Calcular la probabilidad de que el pasajero elegido viaje en camarote de categoría especial.

Solución:

Se definen los sucesos:

R =El turista es ruso. Ch =El turista es chino. J =El turista es japonés.

S =El turista se aloja en un camarote estándar.

E =El turista se aloja en un camarote especial.

L =El turista se aloja en un camarote de lujo.

La probabilidad de que el pasajero sea ruso es: $P(R) = 1 - P(Ch) - P(J)$

$$P(R) = 1 - 0'3 - 0'1 = 0'6$$

La probabilidad de que el pasajero sea ruso es **0'6**.

Ejercicio 3

b) Calcular la probabilidad de que el pasajero sea ruso y viaje en camarote de categoría estándar.

Construimos un diagrama de árbol para poder resolver el resto de apartados.

“El 30% de los viajeros son chinos, el 10% japoneses y el resto rusos”

“Los japoneses viajan todos en camarote estándar.”

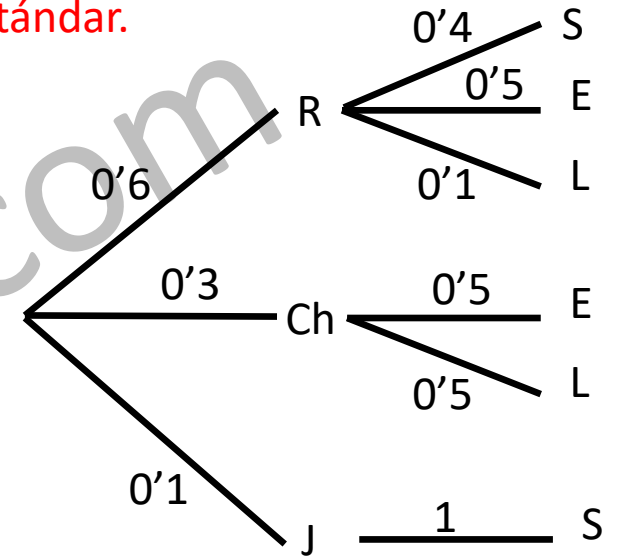
“De los turistas rusos el 40% viajan en camarote estándar, el 50% en camarote especial y el resto en camarote de lujo.”

“De los chinos la mitad viajan en camarote especial y el resto en camarote lujo.”

Para calcular la probabilidad de que el pasajero sea ruso y viaje en camarote de categoría estándar se aplica el principio de multiplicación.

$$P(R \cap S) = 0'6 \cdot 0'4 = 0'24$$

La probabilidad de que el pasajero sea ruso y viaje en camarote de categoría estándar es **0'24**.



Ejercicio 3

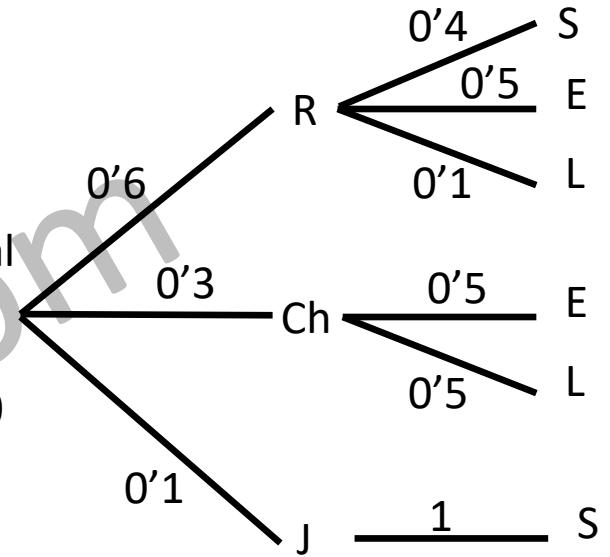
c) Calcular la probabilidad de que el pasajero elegido viaje en camarote de categoría especial.

Para calcular la probabilidad de que el pasajero elegido viaje en camarote de categoría especial se aplica el teorema de la probabilidad total.

$$P(E) = P(R \cap E) + P(Ch \cap E) + P(J \cap E) \longrightarrow P(E) = 0'6 \cdot 0'5 + 0'3 \cdot 0'5 + 0'1 \cdot 0$$

$$P(E) = 0'3 + 0'15 + 0 = 0'45$$

La probabilidad de que el pasajero elegido viaje en un camarote de categoría especial es **0'45**.



Ejercicio 4

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 7x + 10 & \text{si } x \leq -1 \\ 4 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Representa gráficamente la función $f(x)$.

b) Señala los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$.

c) Halla la intersección de la función $f(x)$ con la función $g(x) = 2x$

Solución:

El primer trozo de una función es una parábola, el segundo trozo es una línea recta horizontal y el tercer trozo es una línea recta de pendiente negativa.

Se calcula en primer lugar la posición del vértice de la función cuadrática. $v_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-7}{2 \cdot 1} = -3'5$

Calculo la componente y : $v_y = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(-3'5) = (-3'5)^2 + 7 \cdot (-3'5) + 10 = -2'25$

El vértice es: $(-3'5, -2, 25)$

Calculo si tiene puntos de corte con el eje X si $x \leq -1$: $x^2 + 7x + 10 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} \longrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-7 + 3}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{-7 - 3}{2} = -5 \end{cases}$$

La función cuadrática tiene dos puntos de corte con el Eje X $(-5, 0)$ y $(-2, 0)$

Ejercicio 4

Dada la función
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 7x + 10 & \text{si } x \leq -1 \\ 4 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la función $f(x)$.

Solución:

El vértice es: $(-3, 5)$ Los puntos de corte con el eje X son: $(-5, 0)$ y $(-2, 0)$

Se obtienen puntos auxiliares para representar mejor la parábola.

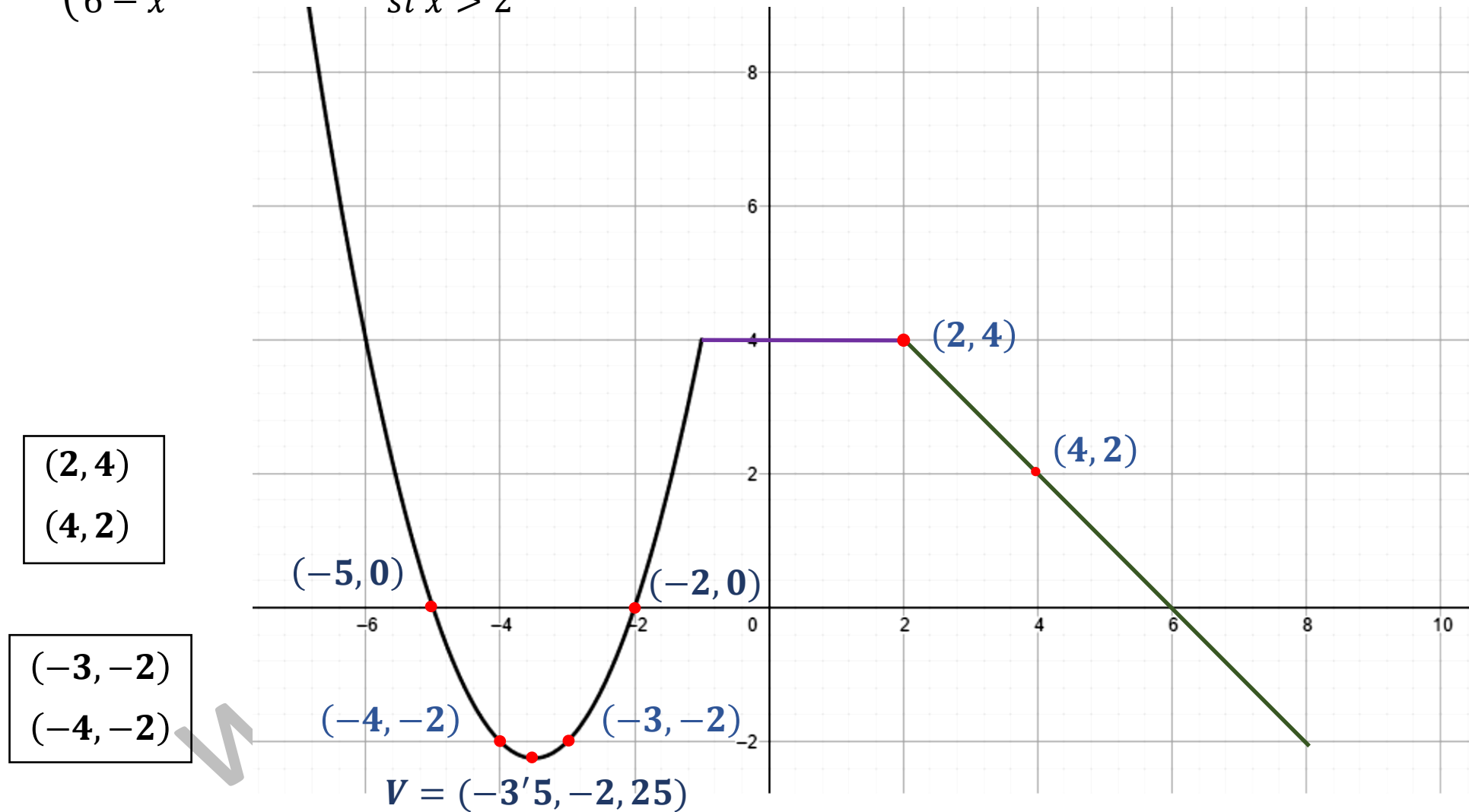
$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^2 + 7 \cdot (-3) + 10 = -2 & (-3, -2) \\ f(-4) &= (-4)^2 + 7 \cdot (-4) + 10 = -2 & (-4, -2) \end{aligned}$$

Para el **tramo recto**, basta con dar valores:

$$\begin{aligned} f(2) &= 6 - 2 = 4 & (2, 4) \\ f(4) &= 6 - 4 = 2 & (4, 2) \end{aligned}$$

Ejercicio 4

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 7x + 10 & \text{si } x \leq -1 \\ 4 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



El vértice es: $(-3.5, -2.25)$

Los puntos de corte con el eje X son: $(-5, 0)$ y $(-2, 0)$

Ejercicio 4

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 7x + 10 & \text{si } x \leq -1 \\ 4 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

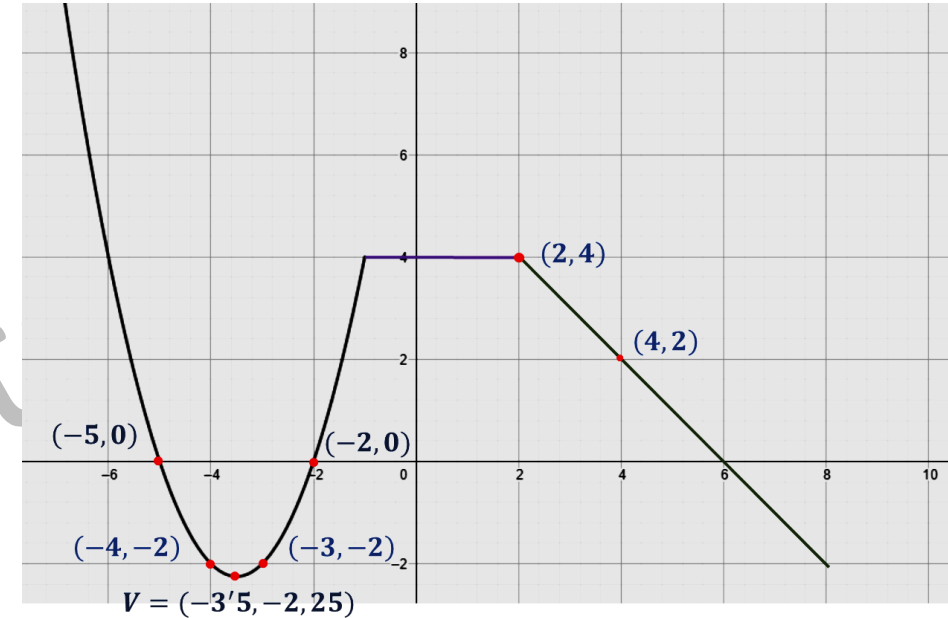
- a) Representa gráficamente la función $f(x)$.
- b) Señala los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$.
- c) Halla la intersección de la función $f(x)$ con la función $g(x) = 2x$

Solución:

A partir de la gráfica podemos deducir el crecimiento y el decrecimiento.

$f(x)$ es creciente si: $x \in (-3'5, -1)$

$f(x)$ es decreciente si: $x \in (-\infty, -3'5) \cup (2, +\infty)$



Ejercicio 4

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 7x + 10 & \text{si } x \leq -1 \\ 4 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Representa gráficamente la función $f(x)$.

b) Señala los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$.

c) Halla la intersección de la función $f(x)$ con la función $g(x) = 2x$

Solución:

Para la intersección de ambas funciones, debemos igualar $f(x)$ con $g(x)$.

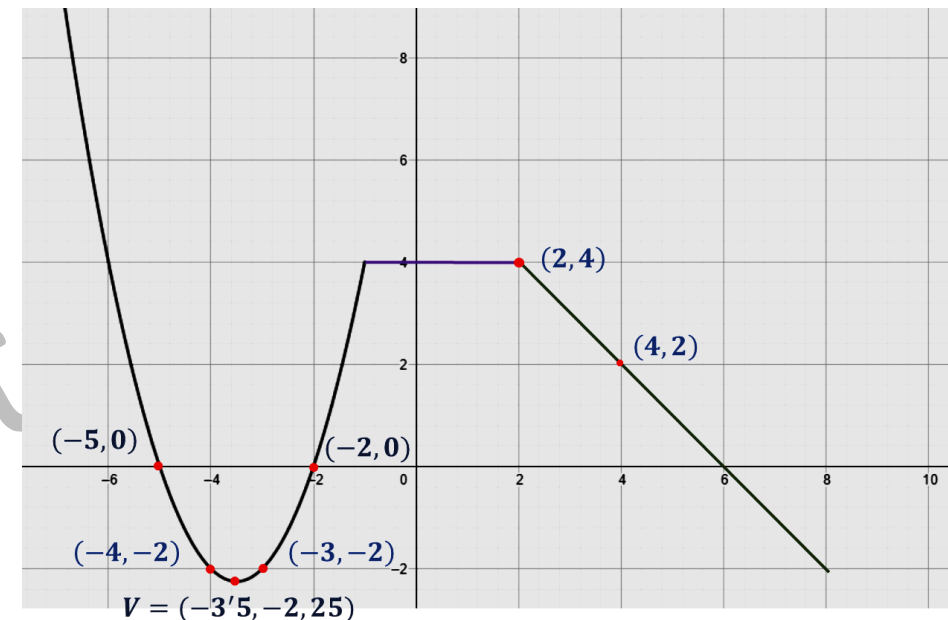
Se iguala $g(x)$ con cada uno de los trozos.

$$x^2 + 7x + 10 = 2x \quad \text{si } x \leq -1 \longrightarrow x^2 + 5x + 10 = 0 \quad \text{si } x \leq -1 \longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

$$4 = 2x \quad \text{si } -1 < x \leq 2 \longrightarrow x = 2 \quad \text{si } -1 < x \leq 2$$

$$6 - x = 2x \quad \text{si } x > 2 \longrightarrow x = 2 \quad \text{si } x > 2 \quad \text{La solución no pertenece al dominio.}$$

El punto de intersección de las funciones es **(2,4)**.



Queda una raíz negativa, compruébalo.

Ejercicio 5

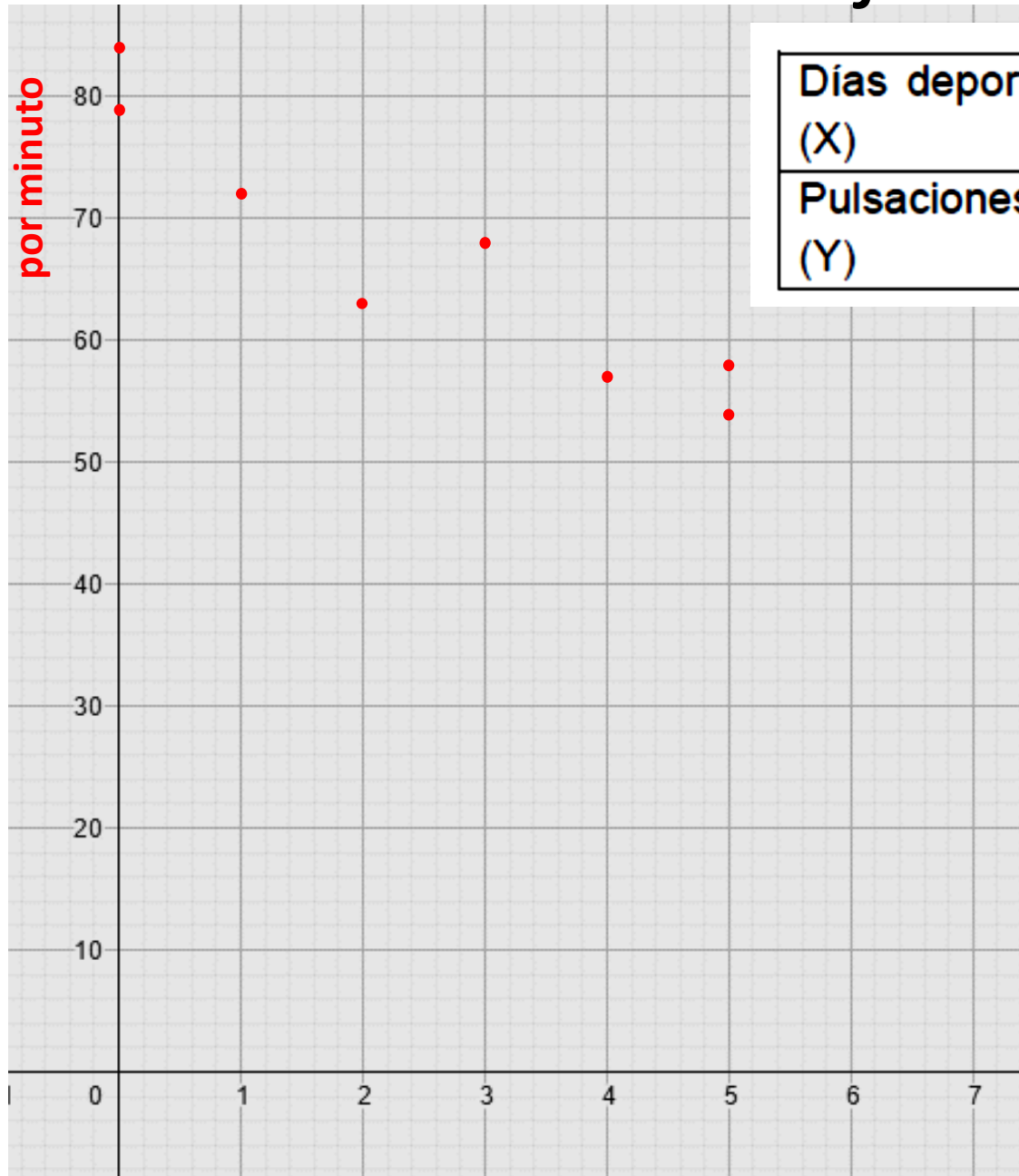
Se ha hecho un estudio estadístico para ver la relación entre la realización de actividad física y el estado del corazón. Para ello se ha medido el número de pulsaciones por minuto en reposo a 8 personas y se les ha preguntado el número de días a la semana que hacen deporte. En la siguiente tabla se reflejan los resultados obtenidos:

Días deporte por semana (X)	1	5	0	2	0	5	4	3
Pulsaciones por minuto (Y)	72	54	79	63	84	58	57	68

- Representar los datos en un diagrama de puntos. Deducir la relación entre las variables según la forma de la nube de puntos.
- Hallar e interpretar el coeficiente de correlación.

Ejercicio 5

Pulsaciones
por minuto



Días deporte por semana (X)	1	5	0	2	0	5	4	3
Pulsaciones por minuto (Y)	72	54	79	63	84	58	57	68

Se observa que las variables están correlacionadas. Cuanto mayor es el número de días de deporte que se practica a la semana, menor es el número de pulsaciones por minuto.

Días deporte
por semana

Ejercicio 5

b) Hallar e interpretar el coeficiente de correlación.

Aunque este cálculo se puede hacer directamente con la calculadora, debemos hacer el cálculo con las tablas.

Se completa la tabla para poder calcular las desviaciones típicas de **x** e **y**, y la covarianza.

Se aplica la fórmula para calcular las medias:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \longrightarrow \bar{x} = \frac{20}{8} = 2'5 \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} \longrightarrow \bar{y} = \frac{535}{8} = 66'875$$

Se aplica la fórmula para calcular las desviaciones típicas:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x})^2} \longrightarrow s_x = \sqrt{\frac{80}{8} - (2'5)^2} = \sqrt{3'75} \approx 1'94$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N} - (\bar{y})^2} \longrightarrow s_y = \sqrt{\frac{36603}{8} - (66'875)^2} = \sqrt{103'1} \approx 10'15$$

Se aplica la fórmula para calcular la covarianza:

$$s_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1190}{8} - 2'5 \cdot 66'875 = -18'4375$$

Se aplica la fórmula para calcular el coeficiente de correlación lineal.

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{-18'4375}{1'94 \cdot 10'15} \approx -0'94$$

x	y	x ²	y ²	x·y
1	72	1	5184	72
5	54	25	2916	270
0	79	0	6241	0
2	63	4	3969	126
0	84	0	7056	0
5	58	25	3364	290
4	57	16	3249	228
3	68	9	4624	204
20	535	80	36603	1190

La correlación entre las variables es muy fuerte, ya que el valor se acerca a -1.