

PRUEBA DE ACCESO A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR



ARAGÓN



MATEMÁTICAS
JUNIO 2020

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este examen son:

Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Problema.

Geometría.

Función cuadrática. Parábola.

Probabilidad.

Estadística bidimensional.



Ejercicio 1

Una empresa de mensajería tiene tres repartidoras que llevan los paquetes a los domicilios: Marina, Sara y Erika. Hoy Marina ha repartido el 30% del total de los paquetes que se tenían que repartir. Entre Marina y Sara han repartido los mismos paquetes que Erika y los paquetes que han repartido entre Sara y Erika son 280. Plantea y resuelve un sistema de ecuaciones para calcular cuántos paquetes ha repartido cada una.

Solución: En primer lugar se definen las incógnitas.

x =nº de paquetes que reparte Marina; y =nº de paquetes que reparte Sara y z =nº de paquetes que reparte Erika.

“Marina ha repartido el 30% del total de los paquetes” $\longrightarrow x = 0'3 \cdot (x + y + z)$

“Entre Marina y Sara han repartido los mismos paquetes que Erika” $\longrightarrow x + y = z$

“los paquetes que han repartido entre Sara y Erika son 280” $\longrightarrow y + z = 280$

En primer lugar, operamos el paréntesis y trasladamos las incógnitas al lado izquierdo de las igualdades.

$$\left. \begin{array}{l} 0'7x - 0'3y - 0'3z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ y + z = 280 \end{array} \right\} \xrightarrow{\times 10} \left. \begin{array}{l} 7x - 3y - 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ y + z = 280 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{reordenar}} \left. \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ y + z = 280 \\ 7x - 3y - 3z = 0 \end{array} \right\}$$

Resolveré el sistema mediante el método de Gauss.

Ejercicio 1

$$\begin{array}{l}
 x + y - z = 0 \\
 y + z = 280 \\
 7x - 3y - 3z = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ y + z = 280 \\ 7x - 3y - 3z = 0 \end{array}} \right\} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 280 \\ 7 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - 7F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 280 \\ 0 & -10 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 + 10F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 280 \\ 0 & 0 & 14 & 2800 \end{pmatrix} \longrightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ y + z = 280 \\ 14z = 2800 \end{array} \right\}$$

Una vez el sistema está escalonado, ya podemos resolver:

$$14z = 2800 \longrightarrow z = 200$$

$$y + z = 280 \longrightarrow y + 200 = 280 \longrightarrow y = 80$$

$$x + y - z = 0 \longrightarrow x + 80 - 200 = 0 \longrightarrow x = 120$$

Marina reparte **120 paquetes**, Sara reparte **80 paquetes** y Erika **200 paquetes**.

Ejercicio 2

Dados los puntos A(0,4), B(-1,3), C(2,6):

a) Halla la distancia entre los puntos A y B

b) Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos B y C.

c) Halla la ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a la recta que pasa por B y C, hallada en el apartado b).

d) Halla la ecuación de la recta que pasa por A y es paralela a la recta que pasa por B y C, hallada en el apartado b).

Solución:

La distancia entre dos puntos se calcula como el módulo del vector que definen.

Calculo el vector: $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,3) - (0,4) = (-1,1)$

Y su módulo: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

La distancia entre los puntos A y B es $\sqrt{2}$ unidades.

Calculo la pendiente entre los puntos B y C y después la ecuación de la recta.

$$m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{6 - 3}{2 - (-1)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \longrightarrow y - 6 = 1 \cdot (x - 2) \longrightarrow y = x + 4$$

La ecuación de la recta es: $y = x + 4$

Ejercicio 2

Dados los puntos A(0,4), B(-1,3), C(2,6):

a) Halla la distancia entre los puntos A y B

b) Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos B y C.

c) Halla la ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a la recta que pasa por B y C, hallada en el apartado b).

d) Halla la ecuación de la recta que pasa por A y es paralela a la recta que pasa por B y C, hallada en el apartado b).

Solución:

Calculo la pendiente perpendicular a la recta anterior. $m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{1} = -1$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \longrightarrow y - 4 = -1 \cdot (x - 0) \longrightarrow y = -x + 4$$

La ecuación de la recta es: $y = -x + 4$

Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente, por ello $m=1$:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \longrightarrow y - 4 = 1 \cdot (x - 0) \longrightarrow y = x + 4$$

La ecuación de la recta es: $y = x + 4$

Ejercicio 3

Una catapulta situada en una torre de asalto lanza un proyectil siguiendo una trayectoria parabólica dada por la función:

$$f(x) = -0'01x^2 + 0'8x + 9$$

la variable x es la coordenada horizontal del trayecto del proyectil medida en metros y la variable $f(x)$ la altura del proyectil respecto del suelo también en metros.

- a) Halla la altura máxima a la que llega el proyectil.
- b) Halla la distancia a la torre de asalto del punto en que impacta el proyectil en el suelo.
- c) Si en $x=70$ hay una muralla de 15 metros de altura, ¿pasará por encima el proyectil o impactará en la muralla? Razona la respuesta.

Solución:

La altura máxima viene dada por el vértice de la parábola que define la función cuadrática. Ello es debido a que el término cuadrático es negativo.

El vértice se calcula con la fórmula: $v_x = \frac{-b}{2a}$ Siendo: $a=-0'01$; $b=0'8$

$$v_x = \frac{-0'8}{2 \cdot (-0'01)} = 40$$

El valor de la altura máxima se obtiene sustituyendo en la función:

$$f(40) = -0'01 \cdot 40^2 + 0'8 \cdot 40 + 9 = 25$$

La altura máxima que alcanza el proyectil es de **25 metros**.

Ejercicio 3

b) Halla la distancia a la torre de asalto del punto en que impacta el proyectil en el suelo.

El proyectil impactará en el suelo cuando la altura sea cero. Se debe resolver la ecuación de segundo grado.

$$-0'01x^2 + 0'8x + 9 = 0$$

$$x = \frac{-0'8 \pm \sqrt{0'8^2 - 4 \cdot (-0'01) \cdot 9}}{2 \cdot (-0'01)} \longrightarrow x = \frac{-0'8 \pm \sqrt{1}}{-0'02} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-0'8 + 1}{-0'02} = -10 \\ x_2 = \frac{-0'8 - 1}{-0'02} = 90 \end{cases}$$

El proyectil impacta en el suelo a **90 metros** de distancia de la torre de asalto.

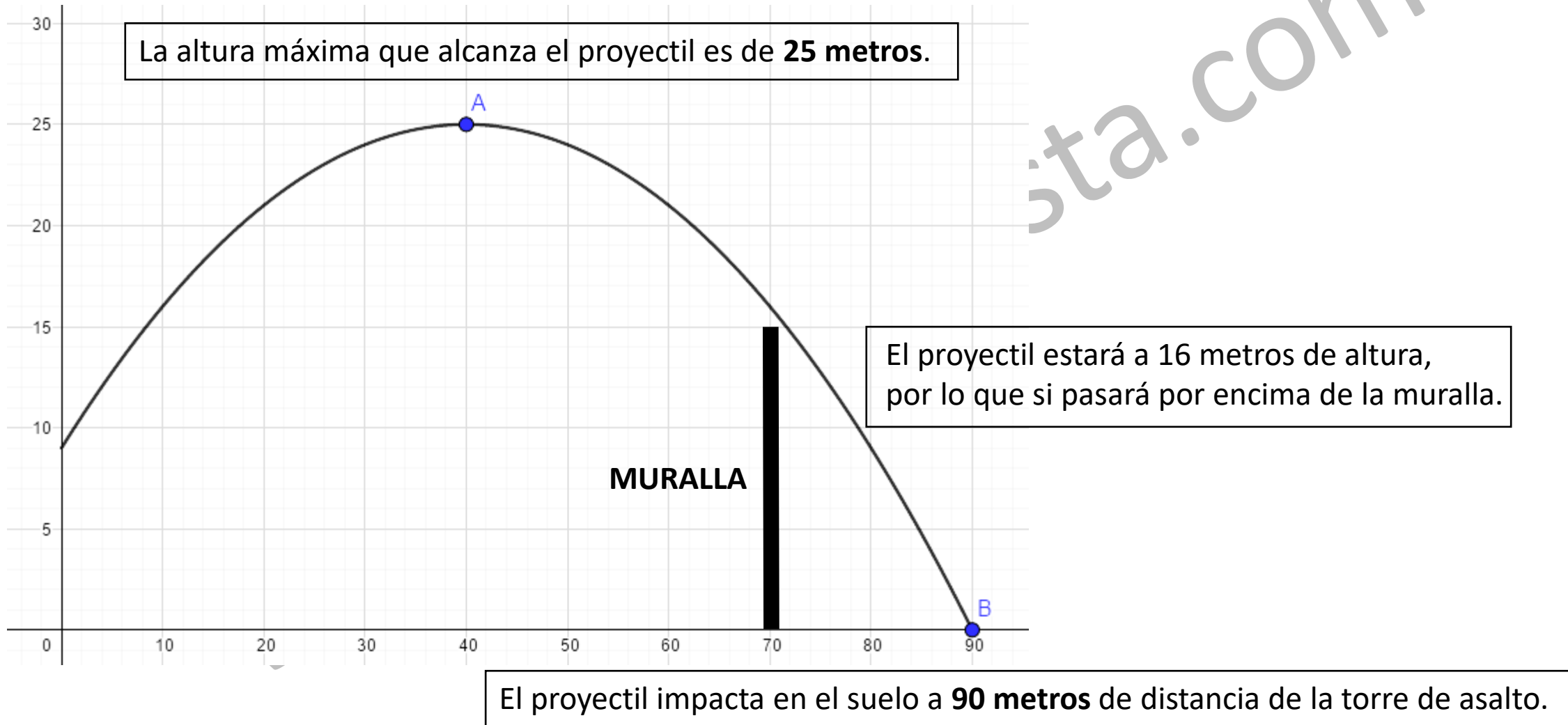
c) Si en $x=70$ hay una muralla de 15 metros de altura, ¿pasará por encima el proyectil o impactará en la muralla? Razona la respuesta.

Basta con sustituir en la función $x=70$. $f(70) = -0'01 \cdot 70^2 + 0'8 \cdot 70 + 9 = 16$

El proyectil estará a 16 metros de altura, por lo que si pasará por encima de la muralla.

Ejercicio 3 (BONUS)

Aunque no se pide, os muestro la representación gráfica. Os ayudará a comprender mejor el problema.



Ejercicio 4

En una empresa el 35% de los productos fabricados se exportan a países pertenecientes a la Unión Europea, el 25% se exportan a países americanos y el resto se comercializa en España.

Uno de cada 10 productos comercializados en España se revisa como medida de control de calidad, 5 de cada 20 productos destinados a otros países de la Unión Europea también se revisan y todos los productos enviados a países americanos se revisan.

Si se elige un producto al azar fabricado por la empresa

- a) ¿Qué probabilidad hay de que se comercialice en España?
- b) ¿Qué probabilidad hay de que el producto elegido se haya exportado a un país de la Unión Europea y no se haya revisado?
- c) ¿Qué probabilidad hay de que el producto elegido no haya sido revisado en el control de calidad?
- d) ¿Qué porcentaje de los productos fabricados en la empresa se revisa en el control de calidad?

Solución:

La suma de las probabilidades debe ser del 1.

$$P(UE) + P(AM) + P(ES) = 1 \longrightarrow 0'35 + 0'25 + P(ES) = 1 \longrightarrow P(ES) = 0'4$$

La probabilidad de que el producto se comercialice en España es **0'4** (o sea, del **40%**).

Ejercicio 4

b) ¿Qué probabilidad hay de que el producto elegido se haya exportado a un país de la Unión Europea y no se haya revisado?

Se construye un diagrama de árbol para contestar la pregunta.

Se aplica el principio de multiplicación.

$$P(UE \cap \bar{R}) = 0'35 \cdot \frac{15}{20} = 0'2625$$

La probabilidad será 0'2625.

c) ¿Qué probabilidad hay de que el producto elegido no haya sido revisado en el control de calidad?

Se aplica el teorema de la probabilidad total.

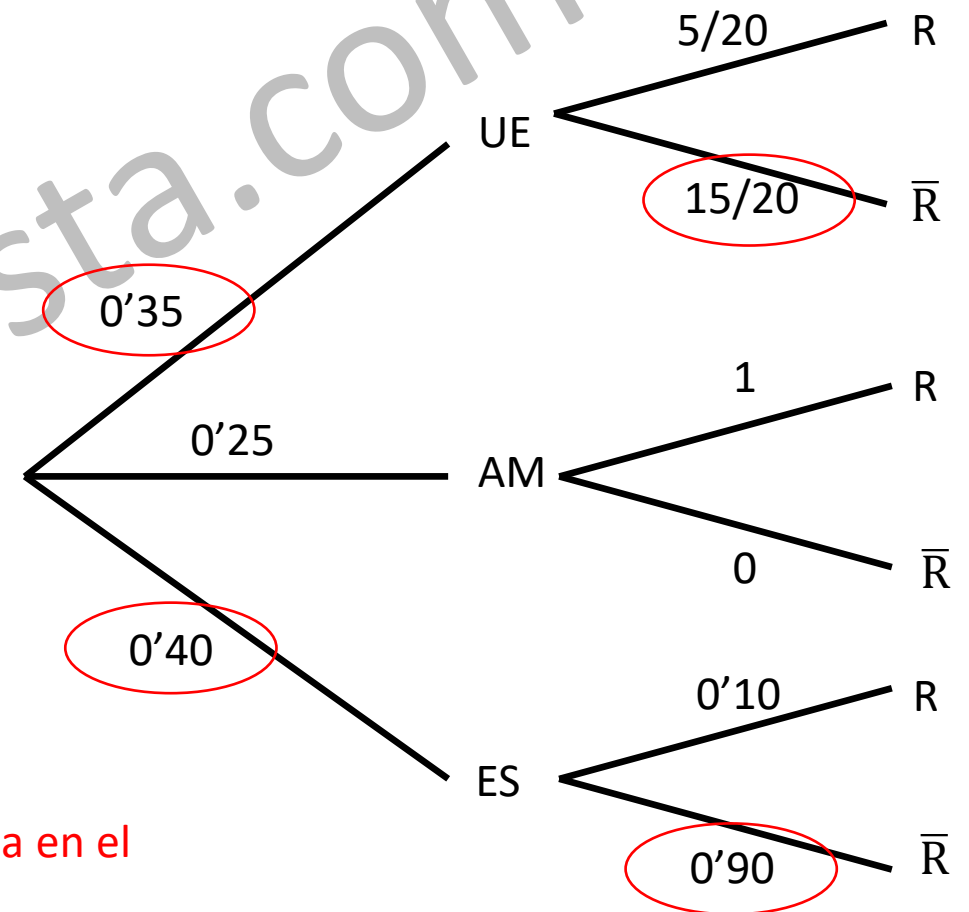
$$P(\bar{R}) = 0'35 \cdot \frac{15}{20} + 0'40 \cdot 0'90 = 0'6225$$

La probabilidad será 0'6225.

d) ¿Qué porcentaje de los productos fabricados en la empresa se revisa en el control de calidad?

Se calcula la probabilidad del suceso contrario. $P(R) = 1 - P(\bar{R}) = 1 - 0'6225 = 0'3775$

El porcentaje de productos revisados ha sido del 37'75%.



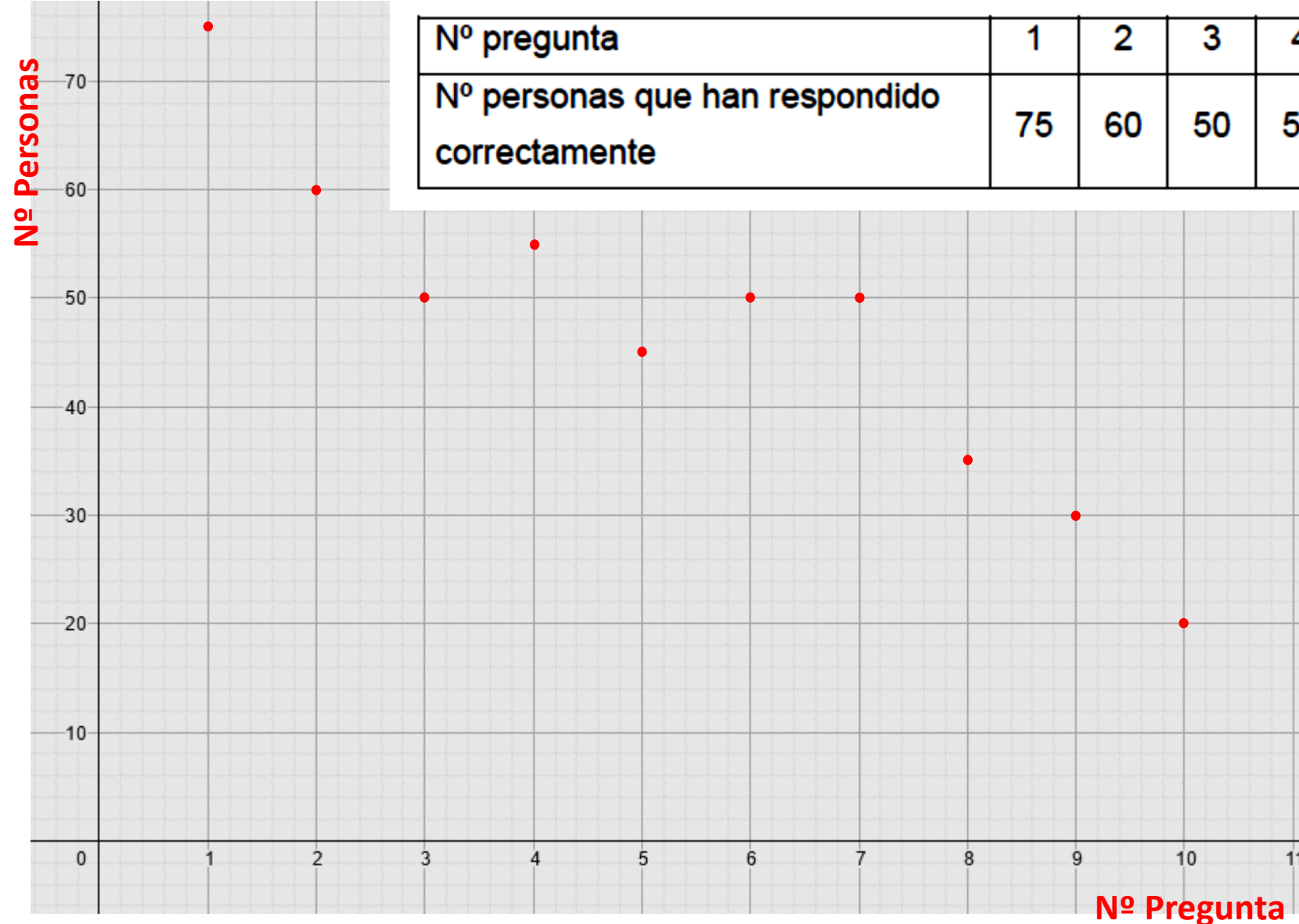
Ejercicio 5

En un examen tipo test de 10 preguntas se ha pretendido hacer cada pregunta más difícil que la anterior. Para comprobar si se ha logrado este objetivo se quiere estudiar la correlación entre el número de pregunta y el número de personas que han respondido correctamente la pregunta, para ello se ha obtenido la siguiente tabla

Nº pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº personas que han respondido correctamente	75	60	50	55	45	50	50	35	30	20

- a) Representar los datos en un diagrama de puntos. Deducir la relación entre las variables según la forma de la nube de puntos.
- b) Hallar e interpretar el coeficiente de correlación.

Ejercicio 5



- Se observa que las variables están correlacionadas tal como se pretendía. Conforme avanza el número de pregunta, menos personas responden correctamente.

Ejercicio 5

b) Hallar e interpretar el coeficiente de correlación.

Aunque este cálculo se puede hacer directamente con la calculadora, debemos hacer el cálculo con las tablas.

Se completa la tabla para poder calcular las desviaciones típicas de **x** e **y**, y la covarianza.

Se aplica la fórmula para calcular las medias:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \longrightarrow \bar{x} = \frac{55}{10} = \boxed{5'5} \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} \longrightarrow \bar{y} = \frac{470}{10} = \boxed{47}$$

Se aplica la fórmula para calcular las desviaciones típicas:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x})^2} \longrightarrow s_x = \sqrt{\frac{385}{10} - (5'5)^2} = \sqrt{8'25} \approx \boxed{2'87}$$
$$s_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N} - (\bar{y})^2} \longrightarrow s_y = \sqrt{\frac{24300}{10} - (47)^2} = \sqrt{221} \approx \boxed{14'87}$$

Se aplica la fórmula para calcular la covarianza:

$$s_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{2190}{10} - 5'5 \cdot 47 = \boxed{-39'5}$$

Se aplica la fórmula para calcular el coeficiente de correlación lineal.

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{-39'5}{2'87 \cdot 14'87} \approx \boxed{-0'93}$$

x	y	x ²	y ²	x·y
1	75	1	5625	75
2	60	4	3600	120
3	50	9	2500	150
4	55	16	3025	220
5	45	25	2025	225
6	50	36	2500	300
7	50	49	2500	350
8	35	64	1225	280
9	30	81	900	270
10	20	100	400	200
55	470	385	24300	2190

La correlación entre las variables es muy fuerte, ya que el valor se acerca a -1.