

PRUEBA DE ACCESO A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR



ARAGÓN



MATEMÁTICAS
JUNIO 2021

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este examen son:

Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Problema.

Geometría.

Estudio de una función a trozos. Función valor absoluto.

Probabilidad.

Estadística bidimensional.



VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

No dejes de revisar mi canal, pues iré añadiendo nuevos.

Teoría y ejercicios de probabilidad.



Ejemplo problema sistema de
3 ecuaciones con 3 incógnitas



PAU Comunidad Valenciana
Septiembre 2020

Matrices y determinantes.
Teoría y ejercicios.



Ejemplo problema sistema de
3 ecuaciones con 3 incógnitas

PAU Comunidad Valenciana
Junio 2021



Ejercicio 1

En un torneo de ajedrez una jugadora ha disputado 22 partidas. Por cada partida ganada le suman 5 puntos, por cada partida en tablas le suman 2 puntos y por cada partida perdida le restan 3 puntos. Al final del torneo la jugadora ha obtenido un total de 42 puntos y se sabe que ha obtenido el triple de puntos por las partidas que ha ganado y empatado que los restados por las partidas perdidas. Plantea y resuelve un sistema de ecuaciones para hallar el número de partidas que ha ganado, empatado y perdido.

Solución: En primer lugar se definen las incógnitas.

x =nº de partidas ganadas; y =nº de partidas empatadas y z =nº de partidas perdidas.

<i>"una jugadora ha disputado 22 partidas."</i>	$\longrightarrow$	$x + y + z = 22$	}
<i>"Al final del torneo la jugadora ha obtenido un total de 42 puntos"</i>	$\longrightarrow$	$5x + 2y - 3z = 42$	
<i>"ha obtenido el triple de puntos por las partidas que ha ganado y empatado que los restados por las partidas perdidas"</i>	$\longrightarrow$	$5x + 2y = 3 \cdot 3z$	

En primer lugar, trasladamos las incógnitas al lado izquierdo de las igualdades.

$x + y + z = 22$	}	Resolveré el sistema mediante el método de Gauss.
$5x + 2y - 3z = 42$		
$5x + 2y - 9z = 0$		

Ejercicio 1

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 22 \\ 5x + 2y - 3z = 42 \\ 5x + 2y - 9z = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 5 & 2 & -3 & 42 \\ 5 & 2 & -9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - 5F_1 \\ F_3 = F_3 - 5F_1}]{\substack{F_2 = F_2 - 5F_1 \\ F_3 = F_3 - 5F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & -3 & -8 & -68 \\ 0 & -3 & -14 & -110 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & -3 & -8 & -68 \\ 0 & 0 & -6 & -42 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & -3 & -8 & -68 \\ 0 & 0 & -6 & -42 \end{pmatrix} \longrightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 22 \\ -3y - 8z = -68 \\ -6z = -42 \end{array} \right\}$$

Una vez el sistema está escalonado, ya podemos resolver:

$$-6z = -42 \longrightarrow z = 7$$

$$-3y - 8z = -68 \longrightarrow -3y - 8 \cdot 7 = -68 \longrightarrow -3y = -12 \longrightarrow y = 4$$

$$x + y + z = 22 \longrightarrow x + 4 + 7 = 22 \longrightarrow x = 11$$

La jugadora gana **11 partidas**, empata **4 partidas** y perdió **7 partidas**.

Ejercicio 2

Dados los puntos A(-2,3), B(6,-1) y C(6,3):

- a) Halla la distancia entre el punto C y el punto medio entre A y B.
- b) Halla la ecuación de la recta que pasa por C y es paralela a la recta que pasa por A y B.
- c) Halla la intersección entre la recta que pasa por los puntos A y B y los ejes de coordenadas.
- d) los ángulos del triángulo rectángulo que forman los puntos A, B y C.

Solución:

Se calcula el punto medio entre A y B. $M = \frac{A + B}{2} = \frac{(-2,3) + (6,-1)}{2} = \frac{(4,2)}{2} = (2,1)$

La distancia entre dos puntos se calcula como el módulo del vector que definen.

Calculo el vector: $\overrightarrow{CM} = M - C = (2,1) - (6,3) = (-4, -2)$

Y su módulo: $|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$

La distancia entre el punto C y el punto medio entre A y B es $\sqrt{20}$ unidades.

Ejercicio 2

Dados los puntos A(-2,3), B(6,-1) y C(6,3):

b) Halla la ecuación de la recta que pasa por C y es paralela a la recta que pasa por A y B.

c) Halla la intersección entre la recta que pasa por los puntos A y B y los ejes de coordenadas.

d) los ángulos del triángulo rectángulo que forman los puntos A, B y C.

Solución:

Calculo la pendiente entre los puntos A y B y después la ecuación de la recta.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 3}{6 - (-2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \longrightarrow y - 3 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 6) \longrightarrow 2y - 6 = -x + 6 \longrightarrow x + 2y - 12 = 0$$

La ecuación de la recta que pasa por C y es paralela a la recta que pasa por A y B es: $x + 2y - 12 = 0$

Ejercicio 2

Dados los puntos A(-2,3), B(6,-1) y C(6,3):

c) Halla la intersección entre la recta que pasa por los puntos A y B y los ejes de coordenadas.

d) los ángulos del triángulo rectángulo que forman los puntos A, B y C.

Solución:

A partir de la pendiente entre los puntos A y B (calculada anteriormente) y el punto A, se calcula la ecuación de la recta.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 3}{6 - (-2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \longrightarrow y - 3 = -\frac{1}{2} \cdot (x - (-2)) \longrightarrow 2y - 6 = -x - 2 \longrightarrow x + 2y - 4 = 0$$

Calculo los puntos de corte con el eje X y con el eje Y.

$$\text{Eje Y} (x = 0) \longrightarrow 0 + 2y - 4 = 0 \longrightarrow y = 2 \longrightarrow \boxed{P = (0, 2)}$$

$$\text{Eje X} (y = 0) \longrightarrow x + 2 \cdot 0 - 4 = 0 \longrightarrow x = 4 \longrightarrow \boxed{Q = (4, 0)}$$

Ejercicio 2

Dados los puntos A(-2,3), B(6,-1) y C(6,3):

d) los ángulos del triángulo rectángulo que forman los puntos A, B y C.

Solución:

Calculo los vectores: $\overrightarrow{AB} = B - A = (6, -1) - (-2, 3) = (8, -4)$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (6, 3) - (-2, 3) = (8, 0)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{|(8, -4) \cdot (8, 0)|}{\sqrt{8^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{8^2 + 0^2}} = \frac{|64 + 0|}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{64}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5} \longrightarrow \alpha = 26'57^\circ$$

Calculo los vectores: $\overrightarrow{BA} = A - B = (-2, 3) - (6, -1) = (-8, 4)$

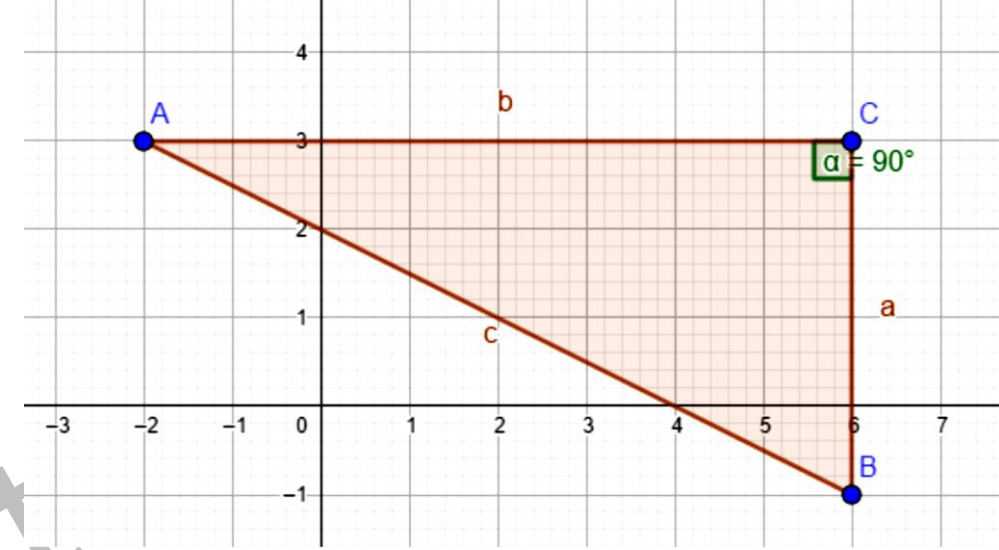
$$\overrightarrow{BC} = C - B = (6, 3) - (6, -1) = (0, 4)$$

$$\cos(\beta) = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{|(-8, 4) \cdot (0, 4)|}{\sqrt{(-8)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{0^2 + 4^2}} = \frac{|0 + 16|}{\sqrt{80} \cdot 4} = \frac{\sqrt{5}}{5} \longrightarrow \beta = 63'43^\circ$$

Puesto que los 3 ángulos del triángulo suman 180° :

$$\gamma = 180 - \alpha - \beta = 180 - 26'57^\circ - 63'43^\circ = 90^\circ$$

Es un triángulo rectángulo. Los ángulos son: $\alpha = 26'57^\circ$; $\beta = 63'43^\circ$; $\gamma = 90^\circ$.



Ejercicio 3

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Representa gráficamente la función $f(x)$

b) Señala los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$.

c) Halla la intersección de la función $f(x)$ con la función $g(x) = |x^2 - 12|$

Solución:

Se debe representar cada trozo. El primer trozo es una función cuadrática, y su gráfica es una parábola. El segundo trozo es una función lineal, y su gráfica es una línea recta. Comienzo con la función cuadrática.

El vértice se calcula con la fórmula: $v_x = \frac{-b}{2a}$ Siendo: $a=-1$; $b=0$

$v_x = \frac{-0}{2 \cdot (-1)} = 0$ El valor de ordenada se obtiene sustituyendo en la función: $f(0) = -0^2 + 2 = 2$

$$V = (0, 2)$$

Se dan valores para representar la función cuadrática y a la lineal.

x	y
1	1
-1	1
-2	-2

x	y
1	1
2	2
3	3

Ejercicio 3

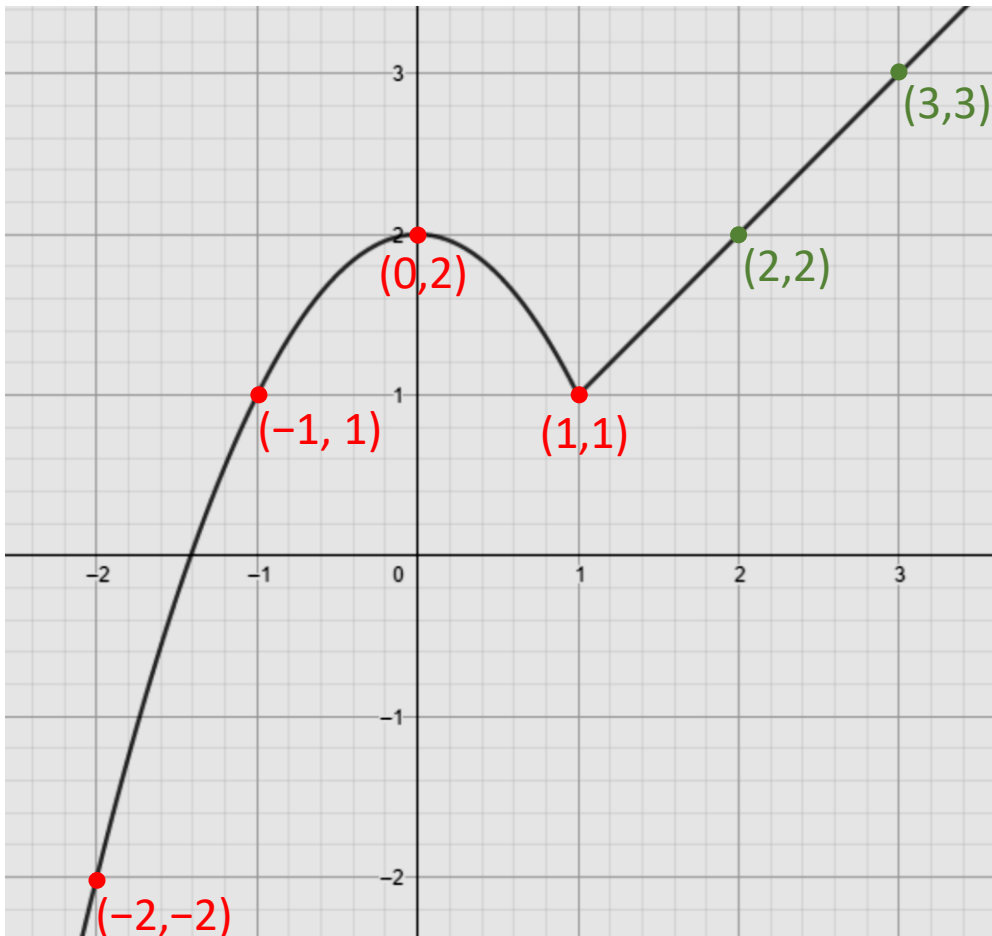
Dada la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Representa gráficamente la función $f(x)$

x	y
1	1
-1	1
-2	-2

x	y
1	1
2	2
3	3

$V = (0, 2)$



Ejercicio 3

b) Señala los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$.

De la gráfica se deduce que:

$f(x)$ es **decreciente** en $x \in (0, 1)$ y **creciente** en $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

c) Halla la intersección de la función $f(x)$ con la función $g(x) = |x^2 - 12|$

Se expresa la función valor absoluto como una función a trozos.

Se iguala a cero la función y se hace un estudio de signos.

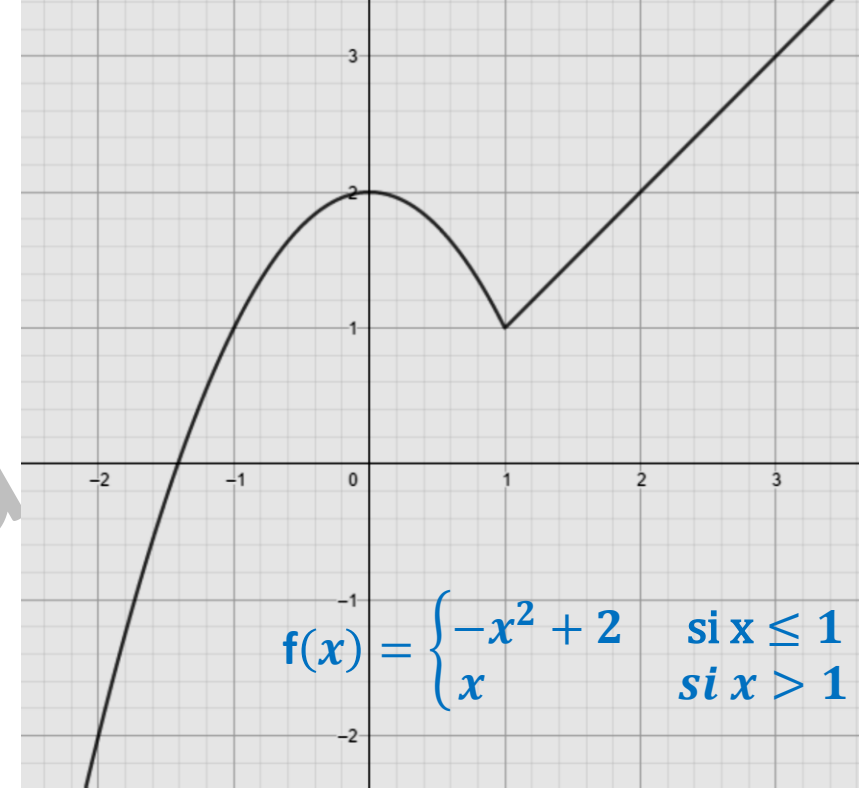
$$x^2 - 12 = 0 \longrightarrow x = \pm\sqrt{12}$$

$+$	$-\sqrt{12}$	$-$	$+\sqrt{12}$	$+$
$x^2 - 12$		$-x^2 + 12$		$x^2 - 12$

Quedando $g(x)$, expresada como función a trozos:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 12 & \text{si } x < -\sqrt{12} \\ -x^2 + 12 & \text{si } -\sqrt{12} \leq x < \sqrt{12} \\ x^2 - 12 & \text{si } x \geq \sqrt{12} \end{cases}$$

©Angel Cuesta Arza



c) Halla la intersección de la función $f(x)$ con la función $g(x) = |x^2 - 12|$

El punto de intersección se obtiene igualando las funciones. Primero se iguala el primer trozo y después el segundo.

si $x \leq 1$

$$-x^2 + 2 = |x^2 - 12| \longrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2 = x^2 - 12 \\ -x^2 + 2 = -(x^2 - 12) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -2x^2 = -14 \longrightarrow x = \pm\sqrt{7} \\ 0 = 10 \text{ (absurdo)} \end{cases} \xrightarrow{x \leq 1} x = -\sqrt{7}$$

Compruebo si la solución es válida.

$$-x^2 + 2 = |x^2 - 12| \longrightarrow -(-\sqrt{7})^2 + 2 = |(-\sqrt{7})^2 - 12| \longrightarrow -5 = |5| \text{ (absurdo); solución no válida}$$

$$\text{si } x > 1 \quad x = |x^2 - 12| \longrightarrow \begin{cases} x = x^2 - 12 \\ x = -(x^2 - 12) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 12 = 0 \\ -x^2 - x + 12 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases} \xrightarrow{x > 1} \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ x = -4 \end{cases} \xrightarrow{x > 1} x = 3 \end{cases}$$

Compruebo si las soluciones son válidas.

$$x = |x^2 - 12| \longrightarrow 3 = |3^2 - 12| \longrightarrow 3 = |3| \quad x = 3 \text{ es solución válida}$$

$$x = |x^2 - 12| \longrightarrow 4 = |4^2 - 12| \longrightarrow 4 = |4| \quad x = 4 \text{ es solución válida}$$

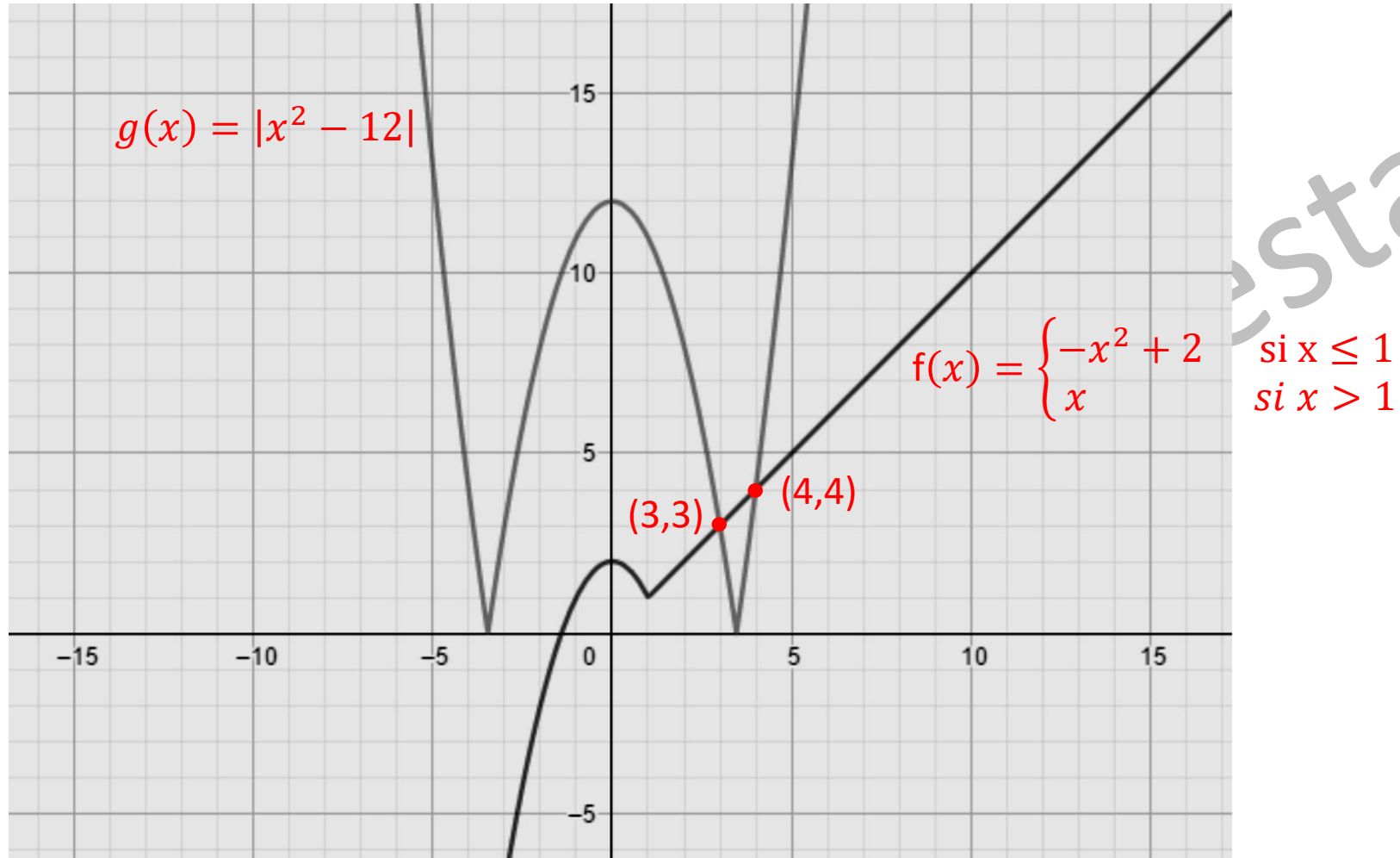
Los puntos de intersección se obtienen al sustituir en las funciones. Ya lo hemos hecho en la comprobación.

$$\boxed{A = (3, 3)}$$

$$\boxed{B = (4, 4)}$$

Ejercicio 3

Muestro la gráfica en la que se pueden ver los puntos en los que las dos gráficas se intersectan.



Ejercicio 4

Un tenista quiere estudiar la relación entre las horas que entrena y el número de torneos que gana en una temporada. Para ello, cada final de temporada, anota el número de horas entrenadas y el número de torneos en los que resulta ganador. En la siguiente tabla se reflejan los resultados obtenidos después de 7 años de observación.

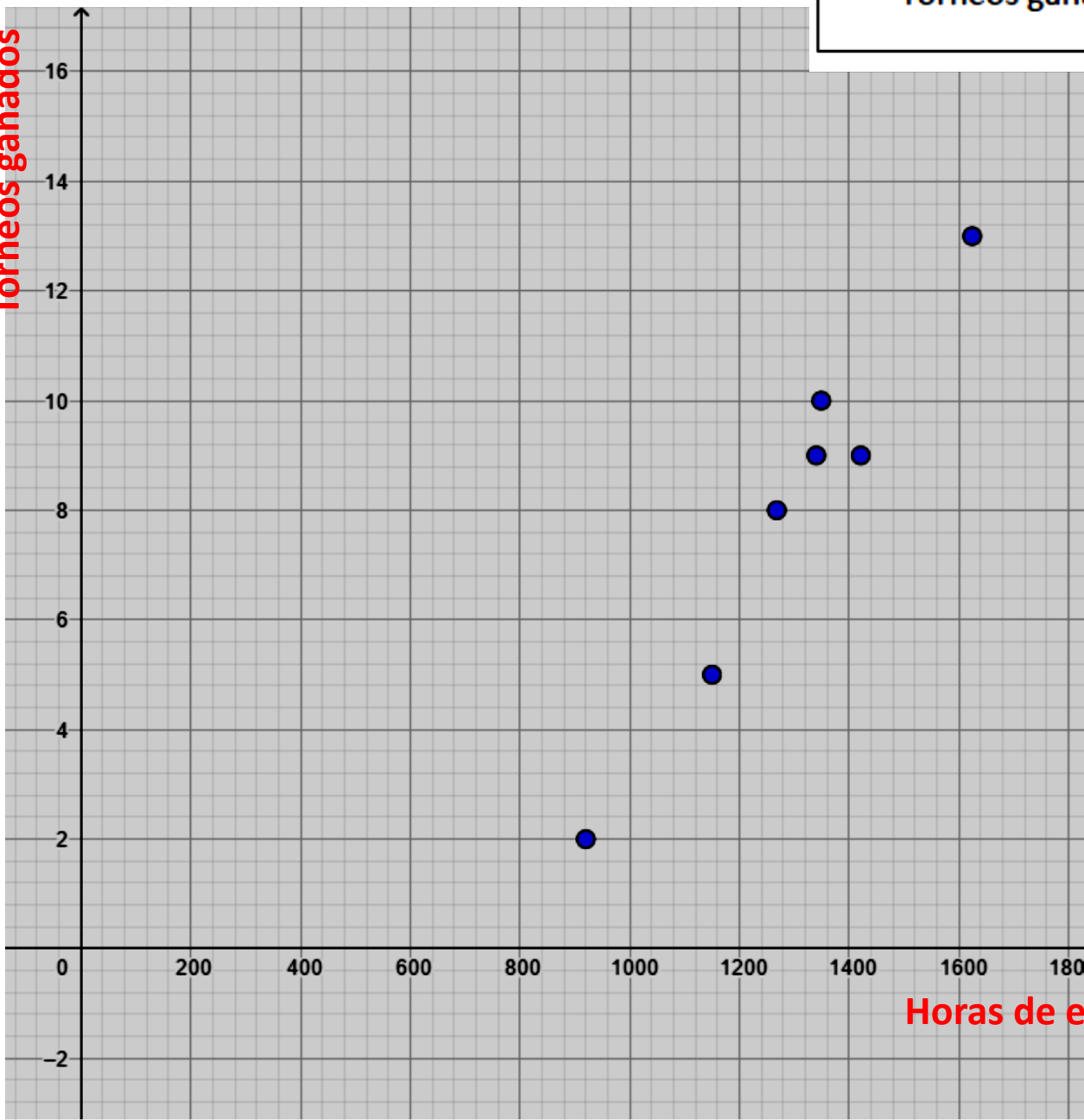
Horas de entrenamiento(X)	1150	920	1268	1340	1624	1421	1349
Torneos ganados (Y)	5	2	8	9	13	9	10

- a) Representar los datos en un diagrama de puntos. Deducir la relación entre las variables según la forma de la nube de puntos.
- b) Hallar e interpretar el coeficiente de correlación.

Ejercicio 4

Horas de entrenamiento(X)	1150	920	1268	1340	1624	1421	1349
Torneos ganados (Y)	5	2	8	9	13	9	10

Torneos ganados



Horas de entrenamiento

Se observa que las variables están correlacionadas. Conforme aumenta el número de horas de entrenamientos, más torneos se gana el jugador.

Ejercicio 4

b) Hallar e interpretar el coeficiente de correlación.

Aunque este cálculo se puede hacer directamente con la calculadora, debemos hacer el cálculo con las tablas.

Se completa la tabla para poder calcular las desviaciones típicas de **x** e **y**, y la covarianza.

Se aplica la fórmula para calcular las medias:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \longrightarrow \bar{x} = \frac{9072}{7} = \boxed{1.296} \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} \longrightarrow \bar{y} = \frac{56}{7} = \boxed{8}$$

Se aplica la fórmula para calcular las desviaciones típicas:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x})^2} \longrightarrow s_x = \sqrt{\frac{12048742}{7} - (1.296)^2} = \sqrt{41632'857} \approx \boxed{204'04}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N} - (\bar{y})^2} \longrightarrow s_y = \sqrt{\frac{524}{7} - 8^2} = \sqrt{10'857} \approx \boxed{3'295}$$

Se aplica la fórmula para calcular la covarianza: Se aplica la fórmula para calcular el coeficiente de correlación lineal.

$$s_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{77185}{7} - 1.296 \cdot 8 = \boxed{658'43}$$

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{658'43}{204'04 \cdot 3'295} \approx \boxed{0'98}$$

x	y	x ²	y ²	x·y
1150	5	1322500	25	5750
920	2	846400	4	1840
1268	8	1607824	64	10144
1340	9	1795600	81	12060
1624	13	2637376	169	21112
1421	9	2019241	81	12789
1349	10	1819801	100	13490
9.072	56	12.048.742	524	77.185

La correlación entre las variables es muy fuerte, ya que el valor se acerca a 1.

Ejercicio 5

En una biblioteca el 70% de los libros son novelas, el 20% son obras teatrales y el resto son libros de poesía. Revisados todos los libros se observa que el 40% de las novelas, el 30% de los libros de teatro y el 15% de los de poesía son de autores extranjeros. Si se elige al azar un libro de la biblioteca, hallar:

- a) La probabilidad de que sea un libro de poesía.
- b) La probabilidad de sea un libro de teatro de un autor extranjero.
- c) la probabilidad de que sea un libro de un autor español.

Solución:

- a) Se calcula la probabilidad del suceso contrario.

$$P(P) = 1 - P(N) - P(OT) = 1 - 0'7 - 0'2 = 0'1$$

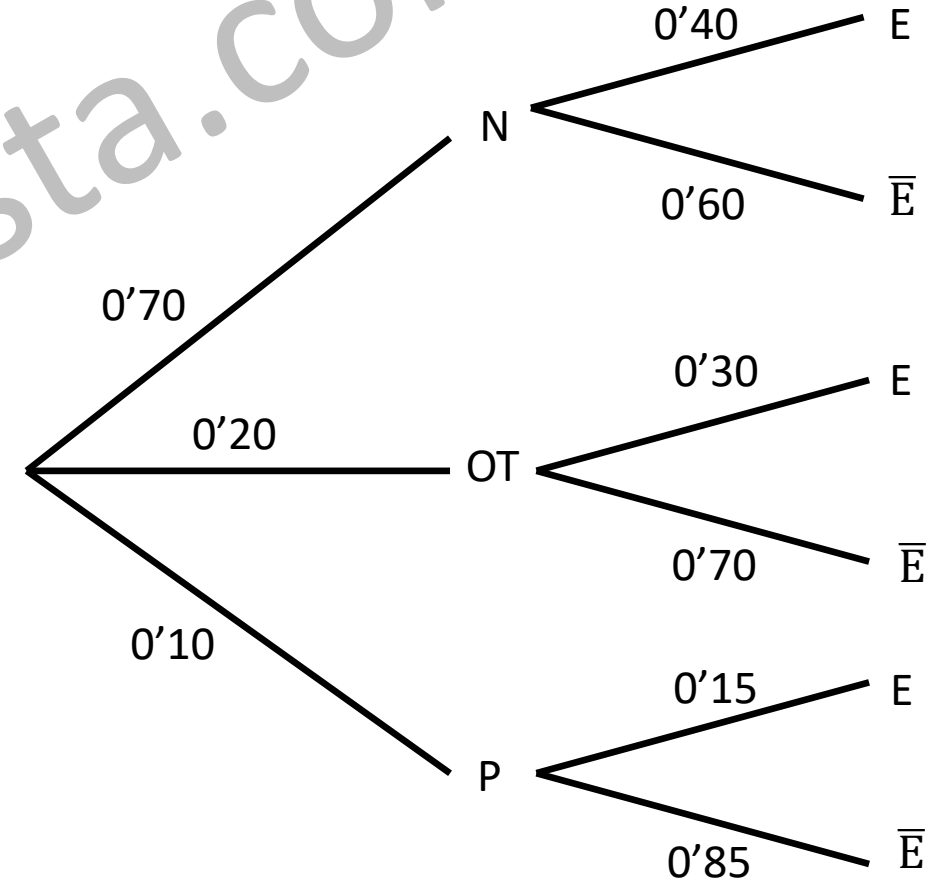
La probabilidad de que sea un libro de poesía es **0'1**.

- b) Se construye un diagrama de árbol para contestar la pregunta.

Se aplica el principio de multiplicación.

$$P(T \cap E) = P(OT) \cdot P(E/OT) = 0'2 \cdot 0'3 = 0'06$$

La probabilidad de sea un libro de teatro de un autor extranjero es **0'06**.



Ejercicio 5

c) La probabilidad de que sea un libro de un autor español.

Se aplica el teorema de la probabilidad total.

$$P(\bar{E}) = P(N) \cdot P(\bar{E}/N) + P(OT) \cdot P(\bar{E}/OT) + P(P) \cdot P(\bar{E}/P)$$

$$P(E) = 0'7 \cdot 0'6 + 0'2 \cdot 0'7 + 0'1 \cdot 0'85 = 0'645$$

La probabilidad de que sea un libro de un autor español será **0'645**.

