

PRUEBA DE ACCESO A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR



ARAGÓN



MATEMÁTICAS
JUNIO 2022

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este examen son:

Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Problema.

Trigonometría

Geometría.

Estudio de una función a trozos. Máximos y mínimos relativos.

Probabilidad.

VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

No dejes de revisar mi canal, pues añado contenido continuamente a mi canal.

Teoría y ejercicios de probabilidad.



Ejemplo problema sistema de
3 ecuaciones con 3 incógnitas

PAU Comunidad Valenciana
Septiembre 2020



Matrices y determinantes.
Teoría y ejercicios.



Teoría y ejercicios de trigonometría



Ejemplo problema sistema de
3 ecuaciones con 3 incógnitas

PAU Comunidad Valenciana
Junio 2021



Funciones lineales.
Teoría y ejercicios.



Ejercicio 1

Juan compra en la frutería 4 kg de peras, 4 de kg de fresas y 6 kg de melocotones gastándose 28 euros; a la semana siguiente compra 2 kg de peras, 6 kg de fresas y 3 kg de melocotones gastándose 24 euros; y en la tercera semana se gasta 23 euros en 3 kg de peras, 1 kg de fresas y 8 kg de melocotones. Si no ha variado el precio de las frutas en las tres semanas, ¿Cuánto cuesta el kilogramo de cada fruta?

Solución: En primer lugar se definen las incógnitas.

x=precio del kilo de peras; **y**= precio del kilo de fresas y **z**= precio del kilo de melocotones.

“Juan compra en la frutería 4 kg de peras, 4 de kg de fresas y 6 kg de melocotones gastándose 28 euros.” $\longrightarrow 4x + 4y + 6z = 28$

“a la semana siguiente compra 2 kg de peras, 6 kg de fresas y 3 kg de melocotones gastándose 24 euros” $\longrightarrow 2x + 6y + 3z = 24$

“en la tercera semana se gasta 23 euros en 3 kg de peras, 1 kg de fresas y 8 kg de melocotones” $\longrightarrow 3x + y + 8z = 23$

Quedando el sistema de ecuaciones:

$$4x + 4y + 6z = 28$$

$$2x + 6y + 3z = 24$$

$$3x + y + 8z = 23$$

Resolveré el sistema mediante el método de Gauss.

Ejercicio 1

$$\left. \begin{array}{l} 4x+4y+6z=28 \\ 2x+6y+3z=24 \\ 3x+y+8z=23 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 & 28 \\ 2 & 6 & 3 & 24 \\ 3 & 1 & 8 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=2F_2-F_1 \\ F_3=4F_3-3F_1}]{\substack{F_2=2F_2-F_1 \\ F_3=4F_3-3F_1}} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 & 28 \\ 0 & 8 & 0 & 20 \\ 0 & -8 & 14 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+F_2} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 28 \\ 0 & 8 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 14 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \left. \begin{array}{l} 4x+4y+6z=28 \\ 8y=20 \\ 14z=28 \end{array} \right\}$$

Una vez el sistema está escalonado, ya podemos resolver:

$$14z = 28 \longrightarrow z = 2$$

$$8y = 20 \longrightarrow y = \frac{20}{8} = 2'5$$

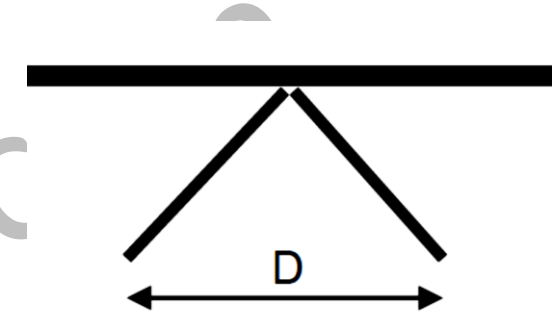
$$4x+4y+6z=28 \longrightarrow 4x + 4 \cdot 2'5 + 6 \cdot 2 = 28 \longrightarrow x = \frac{6}{4} = 1'5$$

El precio del kilo de cada fruta es: pera: **1'5 €/kg**, fresa: **2'5 €/kg** y melocotón **2 €/kg**.

Ejercicio 2

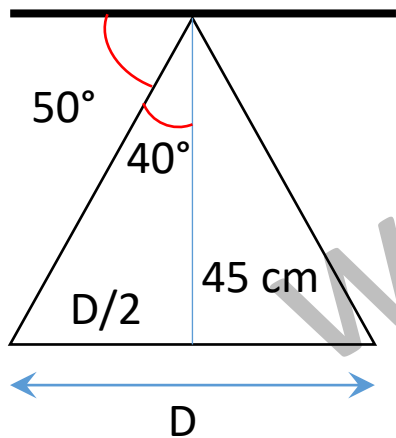
Una mesa tiene dos patas tal como se muestra en la figura. La altura de la mesa respecto al suelo es de 45 cm y las patas forman entre sí un ángulo de 80°

- a) ¿Qué ángulo forman las patas con la mesa?
- b) ¿Qué distancia D hay entre los puntos en que las patas se apoyan en el suelo?
- c) Si se quisiera elevar la mesa a 50 cm del suelo con las mismas patas, ¿qué ángulo formarían las patas entre ellas?



Solución:

Se divide en dos partes el triángulo que forman las patas de la mesa con el suelo. De esta forma se obtiene un triángulo rectángulo.



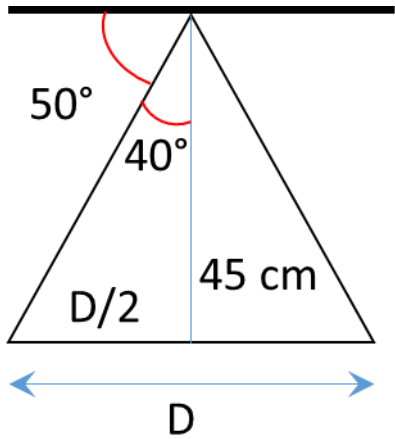
El ángulo que forma la pata con la mesa es el complementario de 40°

Por ello el ángulo que forma cada una de las patas con la mesa es: $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

El ángulo forman las patas con la mesa es **50°**

Ejercicio 2

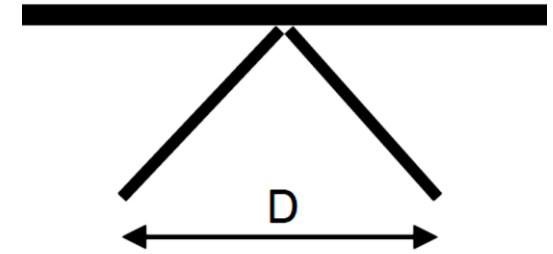
b) ¿Qué distancia D hay entre los puntos en que las patas se apoyan en el suelo?



Se aplica la definición de tangente de un ángulo para calcular D.

$$\tan(40^\circ) = \frac{D/2}{45} \longrightarrow \frac{D}{2} = 45 \cdot \tan(40^\circ) \longrightarrow D = 2 \cdot 45 \cdot \tan(40^\circ) \approx 75'52\text{ cm}$$

La distancia D entre las patas es **75'52 cm**.



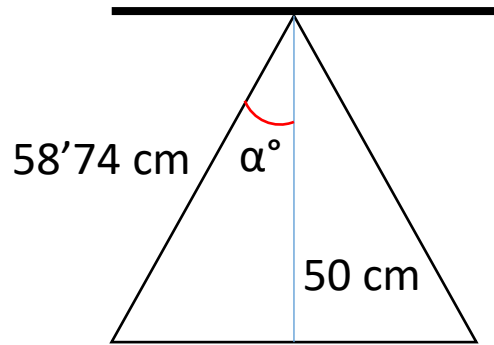
c) Si se quisiera elevar la mesa a 50 cm del suelo con las mismas patas, ¿qué ángulo formarían las patas entre ellas?

Se calcula la longitud de cada una de las patas a partir de la configuración inicial de la mesa. Para ello se aplica la definición del coseno de un ángulo.

$$\cos(40^\circ) = \frac{45}{x} \longrightarrow x = \frac{45}{\cos(40^\circ)} \approx 58'74\text{ cm}$$

Ejercicio 2

c) Si se quisiera elevar la mesa a 50 cm del suelo con las mismas patas, ¿qué ángulo formarían las patas entre ellas?



Se calcula el ángulo que forman las patas entre ellas. Para ello se vuelve a utilizar el triángulo rectángulo con la nueva altura. Para ello se aplica la definición del coseno de un ángulo.

$$\cos(\alpha^\circ) = \frac{50}{58'74} \longrightarrow \alpha^\circ = \arccos\left(\frac{50}{58'74}\right) \approx 31'66^\circ$$

El ángulo que forman las patas es el doble del ángulo obtenido. $\beta^\circ = 2 \cdot \alpha \approx 63'32^\circ$

El ángulo que forman las patas es **63'32°**

NOTA: En este ejercicio puedes utilizar el teorema de los senos o el teorema de los cosenos para resolver el ejercicio.

Ejercicio 3

Dados los puntos A(-4,0), B(2,-6) y C(0,-3), hallar:

- a) la distancia entre el punto C y el punto medio entre A y B.
- b) la ecuación de la recta que pasa por A y B.
- c) la ecuación de la recta que pasa por C y es perpendicular a la recta que pasa por A y B.
- d) la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta que pasa por A y B

Solución:

Se calcula el punto medio entre A y B. $M = \frac{A + B}{2} = \frac{(-4,0) + (2,-6)}{2} = \frac{(-2,-6)}{2} = (-1,-3)$

La distancia entre dos puntos se calcula como el módulo del vector que definen.

Calculo el vector: $\overrightarrow{CM} = M - C = (-1,-3) - (0,-3) = (-1,0)$

Y su módulo: $|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$

La distancia entre el punto C y el punto medio entre A y B es **1 unidad**.

Ejercicio 3

Dados los puntos A(-4,0), B(2,-6) y C(0,-3), hallar:

b) la ecuación de la recta que pasa por A y B.

Calculo la pendiente entre los puntos A y B y después la ecuación de la recta.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-6 - 0}{2 - (-4)} = \frac{-6}{6} = -1$$

Utilizo la ecuación punto pendiente, tomando como punto por el que pasa la recta, el punto A.

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \longrightarrow y - 0 = -1 \cdot (x - (-4)) \longrightarrow y = -x - 4$$

La ecuación de la recta (en forma explícita) que pasa por A y B es: **$y = -x - 4$**

Ejercicio 3

Dados los puntos A(-4,0), B(2,-6) y C(0,-3), hallar:

c) la ecuación de la recta que pasa por C y es perpendicular a la recta que pasa por A y B.

Sabemos que la pendiente de la recta que pasa por A y B es $m = -1$

Calculo la pendiente de la recta perpendicular mediante la fórmula: $m_{\perp} = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-1} = 1$

Utilizo la ecuación punto pendiente, tomando como punto por el que pasa la recta, el punto C.

$$y - (-3) = 1 \cdot (x - 0) \longrightarrow y + 3 = x \longrightarrow y = x - 3$$

La ecuación de la recta (en forma explícita) que pasa por C y es perpendicular a la recta que pasa por A y B es: $y = x - 3$

Ejercicio 3

Dados los puntos A(-4,0), B(2,-6) y C(0,-3), hallar:

d) la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta que pasa por A y B

Sabemos que la pendiente de la recta que pasa por A y B es $m = -1$

Por lo tanto, la pendiente de la recta pedida también es $m = -1$

Utilizo la ecuación punto pendiente, tomando como punto por el que pasa la recta, el punto (0,0).

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \longrightarrow y - 0 = -1 \cdot (x - 0) \longrightarrow y = -x$$

La ecuación de la recta (en forma explícita) que pasa por (0,0) y es paralela a la recta que pasa por A y B es: $y = -x$

Ejercicio 4

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a) Halla las coordenadas de los puntos de intersección de la función $f(x)$ con los ejes de coordenadas.
- b) Representa gráficamente la función $f(x)$.
- c) Determina los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$ y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

El punto de corte con el eje Y lo obtenemos calculando $f(0)$ $f(0) = 0^2 - 1 = -1$

El punto de corte con el eje Y es: $A = (0, -1)$

Los puntos de corte con el eje X los obtenemos igualando a cero la función. Para ello se iguala a CERO cada una de las expresiones que definen la función a trozos.

$$x^2 - 1 = 0 \longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow x = \pm\sqrt{1} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} B = (-1, 0) \\ C = (1, 0) \end{array}$$

$$-x^2 + 6x - 5 = 0 \longrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{-2} \longrightarrow \begin{cases} \cancel{x_3 = 1} \\ x_4 = 5 \end{cases} \quad D = (5, 0)$$

Sólo es mayor que dos la solución x_4 , por ello sólo hay un punto de corte con el eje X en este trozo.

Ejercicio 4

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) Representa gráficamente la función f(x)

Cada uno de los trozos de la función es una parábola. Debemos calcular el vértice de cada una de las parábolas y dar valores. Junto con los puntos de corte con los ejes, completaremos la representación gráfica.

El vértice del primer trozo es: $v_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0$ $f(0) = 0^2 - 1 = -1$ **$A = (0, -1)$**

El vértice del segundo trozo es: $v_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = 3$ $f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 5 = 4$ **$E = (3, 4)$**

Doy valores a la función alrededor de ambos vértices.

$$y = x^2 - 1$$

$$y = -x^2 + 6x - 5$$

x	y
-2	3
-3	8
2	3

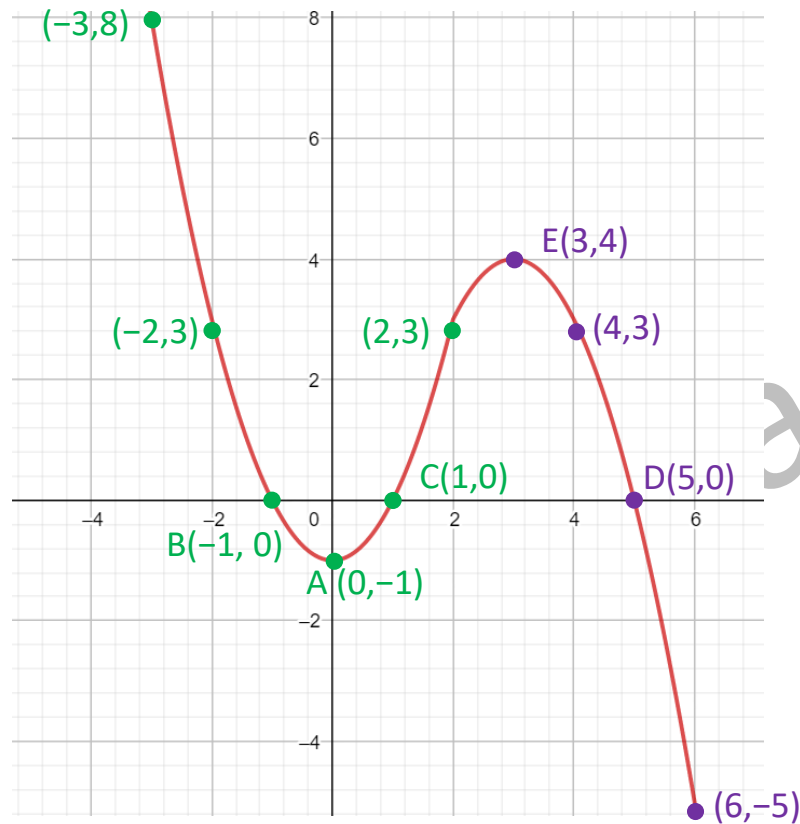
x	y
2	3
4	3
6	-5

Ejercicio 4

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) Representa gráficamente la función $f(x)$

Utilizamos todos los puntos hallados anteriormente.



$$y = x^2 - 1$$

x	y
-2	3
-3	8
2	3

$$y = -x^2 + 6x - 5$$

x	y
2	3
4	3
6	-5

$$A = (0, -1)$$

$$B = (-1, 0)$$

$$C = (1, 0)$$

$$D = (5, 0)$$

$$E = (3, 4)$$

Ejercicio 4

c) Determina los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$ y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

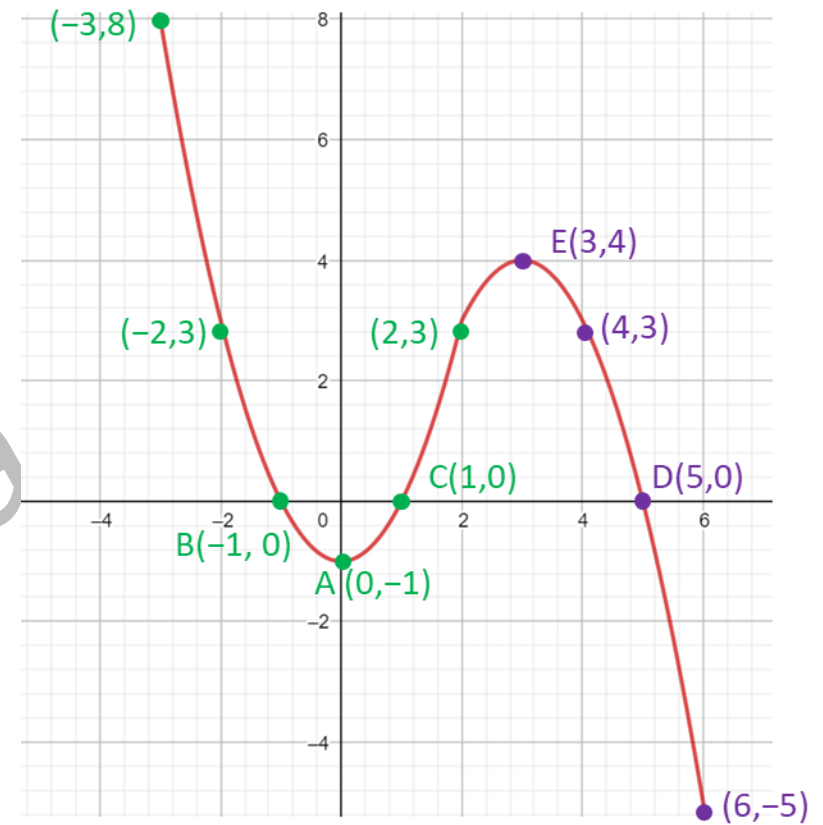
Utilizamos todos los puntos hallados anteriormente y la representación gráfica.

Máximo relativo: $E = (3, 4)$

Mínimo relativo: $A = (0, -1)$

$f(x)$ es **decreciente** si: $x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

$f(x)$ es **creciente** si: $x \in (0, 3)$



Ejercicio 5

En un partido de fútbol se hace una encuesta sobre el medio de transporte utilizado para acudir al campo. Se obtiene que el 30% de los asistentes acuden en vehículo particular, el 60% en transporte público y el resto andando. De los que acuden en transporte público el 80% son puntuales, de los que acuden andando el 90% son puntuales y de los que acuden en transporte particular el 60% ha llegado tarde. Si elegimos un asistente al partido al azar hallar:

- a) la probabilidad de que haya acudido andando.
- b) la probabilidad de que haya acudido en transporte público y no haya sido puntual.
- c) probabilidad de que haya sido puntual.

Solución:

- a) Se calcula la probabilidad del suceso contrario.

$$P(A) = 1 - P(V) - P(T) = 1 - 0'3 - 0'6 = 0'1$$

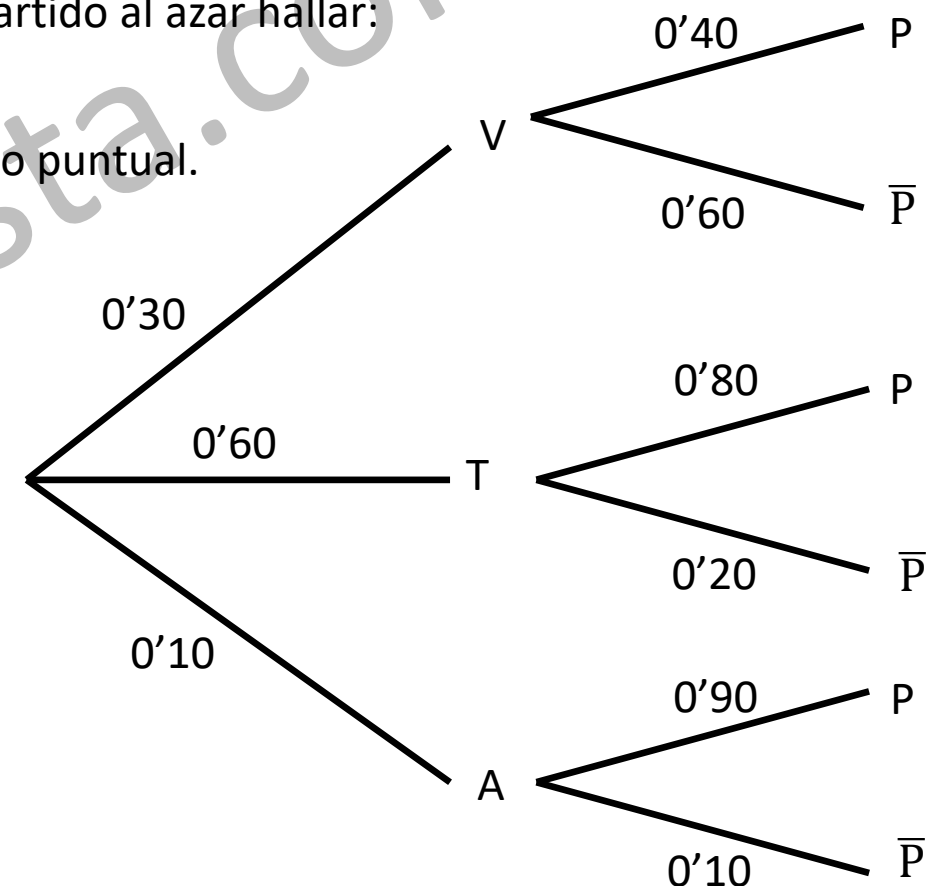
La probabilidad de que haya acudido andando. es **0'1**.

- b) Se construye un diagrama de árbol para contestar la pregunta.

Se aplica el principio de multiplicación.

$$P(T \cap \bar{P}) = P(T) \cdot P(\bar{P}/T) = 0'6 \cdot 0'2 = 0'12$$

La probabilidad de que haya acudido en transporte público y no haya sido puntual es **0'12**.



Ejercicio 5

c) probabilidad de que haya sido puntual.

Se aplica el teorema de la probabilidad total.

$$P(P) = P(V) \cdot P(P/V) + P(T) \cdot P(P/T) + P(A) \cdot P(P/A)$$

$$P(P) = 0'3 \cdot 0'4 + 0'6 \cdot 0'8 + 0'1 \cdot 0'90 = 0'69$$

La probabilidad de que haya sido puntual es **0'69**.

