

PRUEBA DE ACCESO A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR



ARAGÓN



MATEMÁTICAS
MAYO 2023

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este examen son:

Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Problema.

Geometría en el plano.

Problema de una función cuadrática.

Estadística bidimensional. Coeficiente de correlación.

Probabilidad. Álgebra de conjuntos.

VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

No dejes de revisar mi canal, pues añado contenido continuamente a mi canal.

Teoría y ejercicios de probabilidad.



Ejemplo problema sistema de
3 ecuaciones con 3 incógnitas

PAU Comunidad Valenciana
Septiembre 2020



Probabilidad. Álgebra de
conjuntos.



Teoría y ejercicios de funciones
cuadráticas



Ejemplo problema sistema de
3 ecuaciones con 3 incógnitas

PAU Comunidad Valenciana
Junio 2021



Exámenes de años anteriores



Ejercicio 1

Una empresa de alquiler de autocaravanas realiza, en un año, 300 alquileres semanales. Dispone de tres tamaños: pequeñas, medianas y grandes. El alquiler de la autocaravana grande cuesta 1500 euros semanales, la mediana cuesta 1200 euros semanales y la pequeña 1000 euros semanales. Se sabe que, ese año, la empresa ha realizado el doble de alquileres de autocaravanas medianas que la suma de los realizados de los otros dos tamaños y que ha obtenido el mismo dinero con los alquileres de las grandes que con los realizados del modelo pequeño. ¿Cuántos alquileres ha realizado ese año de cada modelo de autocaravana?

Solución:

x = N.º de alquileres de autocaravanas pequeñas

En primer lugar, se definen las incógnitas. y = N.º de alquileres de autocaravanas medianas

z = N.º de alquileres de autocaravanas grandes

$1000x$ = coste del alquiler de autocaravanas pequeñas

A continuación, se definen los costes semanales: $1200y$ = coste del alquiler de autocaravanas medianas

$1500z$ = coste del alquiler de autocaravanas grandes

Se traduce el resto del enunciado del español al lenguaje algebraico.

Pero eso será en la siguiente diapositiva.

Ejercicio 1

"(...) autocaravanas realiza, en un año, 300 alquileres semanales" $\longrightarrow x + y + z = 300$

"la empresa ha realizado el doble de alquileres de autocaravanas medianas que la suma de los realizados de los otros dos tamaños" $\longrightarrow y = 2 \cdot (x + z) \longrightarrow 2x - y + 2z = 0$

"ha obtenido el mismo dinero con los alquileres de las grandes que con los realizados del modelo pequeño." $\longrightarrow 1500z = 1000x \longrightarrow 15z = 10x \longrightarrow 10x - 15z = 0$

Quedando el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 300 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 10x - 15z = 0 \end{array} \right\} \text{ Resolveré el sistema mediante el método de Gauss.}$$

Ejercicio 1

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 300 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 10x - 15z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & -15 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=2F_2-F_1 \\ F_3=F_3-10F_1}]{F_2=2F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & -3 & 0 & -600 \\ 0 & -10 & -25 & -3000 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=3F_3-10F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & -3 & 0 & -600 \\ 0 & 0 & -75 & -3000 \end{pmatrix}$$

F_2	2	-1	2	0
$-2F_1$	-2	-2	-2	-600
$F_2=F_2-2F_1$	0	-3	0	-600

$3F_3$	0	-30	-75	-9000
$-10F_2$	0	30	0	6000
$F_2=F_2-2F_1$	0	0	-75	-3000

F_3	10	0	-15	0
$-10F_1$	-10	-10	-10	-3000
$F_2=F_2-2F_1$	0	-10	-25	-3000

Una vez escalonada la matriz ya podemos resolver el sistema en la siguiente diapositiva.

Ejercicio 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & -3 & 0 & -600 \\ 0 & 0 & -75 & -3000 \end{pmatrix} \longrightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=300 \\ -3y = -600 \\ -75z = -3000 \end{array} \right\}$$

Una vez el sistema está escalonado, ya podemos resolver:

$$-75z = -3000 \longrightarrow z = \frac{-3000}{-75} = \mathbf{40}$$

$$-3y = -600 \longrightarrow y = \frac{-600}{-3} = \mathbf{200}$$

$$x+y+z=300 \longrightarrow x + 200 + 40 = 300 \longrightarrow x = \mathbf{60}$$

Alquiló **60** autocaravanas pequeñas, **200** medianas y **40** grandes.

Ejercicio 2

Dados los puntos A (-2,5) y B(5,1) y la recta r que tiene de ecuación $y = 2x - 3$:

a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

Calculo la pendiente entre los puntos A y B y después la ecuación de la recta.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 5}{5 - (-2)} = \frac{-4}{7}$$

Utilizo la ecuación punto pendiente, tomando como punto por el que pasa la recta, el punto B. $y - y_B = m \cdot (x - x_B)$

$$y - 1 = \frac{-4}{7} \cdot (x - 5) \longrightarrow 7 \cdot (y - 1) = -4 \cdot (x - 5) \longrightarrow 7y - 7 = -4x + 20 \longrightarrow 4x + 7y - 27 = 0$$

La ecuación de la recta (en forma implícita) que pasa por A y B es: **$4x + 7y - 27 = 0$**

Ejercicio 2

Dados los puntos A (-2,5) y B(5,1) y la recta r que tiene de ecuación $y = 2x - 3$:

b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto B y es perpendicular a la recta r.

Sabemos que la pendiente de la recta r es $m = 2$

Calculo la pendiente de la recta perpendicular mediante la fórmula: $m_{\perp} = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{2}$

Utilizo la ecuación punto pendiente, tomando como punto por el que pasa la recta, el punto B. $y - y_B = m_{\perp} \cdot (x - x_B)$

$$y - 1 = \frac{-1}{2} \cdot (x - 5) \longrightarrow 2 \cdot (y - 1) = -1 \cdot (x - 5) \longrightarrow 2y - 2 = -x + 5 \longrightarrow x + 2y - 7 = 0$$

La ecuación de la recta que pasa por el punto B y es perpendicular a la recta r es: $x + 2y - 7 = 0$

Ejercicio 2

Dados los puntos A (-2,5) y B(5,1) y la recta r que tiene de ecuación $y = 2x - 3$:

c) Hallar las coordenadas del punto de intersección entre la recta obtenida en el apartado b) y la recta r

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado por ambas rectas:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{Se sustituye y en la segunda ecuación y se calcula x}$$

$$x + 2 \cdot (2x - 3) - 7 = 0 \longrightarrow x + 4x - 6 - 7 = 0 \longrightarrow x = \frac{13}{5}$$

$$\text{Se calcula el valor de y. } y = 2x - 3 = 2 \cdot \left(\frac{13}{5}\right) - 3 = \frac{11}{5}$$

El punto de corte de ambas rectas es $C = \left(\frac{13}{5}, \frac{11}{5}\right)$

Ejercicio 2

Dados los puntos A $(-2,5)$ y B $(5,1)$ y la recta r que tiene de ecuación $y = 2x-3$:

d) Hallar la distancia entre el punto B y el origen de coordenadas.

La distancia entre dos puntos se calcula como el módulo del vector que definen.

Calculo el vector: $\overrightarrow{OB} = B - O = (5,1) - (0,0) = (5,1)$

Y su módulo: $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

La distancia entre el punto B y el origen es $\sqrt{26}$ **unidades**.

Ejercicio 3

Un motorista realiza un salto desde una rampa inclinada. Desde el momento que sale de la rampa hasta que llega al suelo su trayectoria viene indicada por la siguiente función: $f(x) = -0,01 \cdot x^2 + 0,2 \cdot x + 8$

Siendo x la distancia horizontal recorrida en el salto y $f(x)$ la altura sobre el suelo.

a) Halla la altura de la rampa.

La altura de la rampa se calcula sustituyendo x por cero. $f(0) = -0,01 \cdot 0^2 + 0,2 \cdot 0 + 8 = 8$

La altura de la rampa es **8 metros**.

b) Hallar la mayor altura que alcanza el motorista sobre el suelo.

Puesto que la función cuadrática tiene el coeficiente numérico del término cuadrático negativo, el máximo de la función se encuentra en el vértice de la función.

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0,2}{2 \cdot (-0,01)} = 10$$

La altura máxima que alcanza la motocicleta es **10 metros**.

Ejercicio 3

c) Halla la distancia a la que llega el motorista desde el final de la rampa.

Se iguala la función a cero. $-0,01 \cdot x^2 + 0,2 \cdot x + 8 = 0$

Se resuelve:
$$x = \frac{-0,2 \pm \sqrt{(0,2)^2 - 4 \cdot (-0,01) \cdot 8}}{2 \cdot (-0,01)} = \frac{-0,2 \pm \sqrt{0,36}}{-0,02} = \frac{-0,2 \pm 0,6}{-0,02} = \begin{cases} x = -20 \\ x = 40 \end{cases}$$

Se descarta la solución negativa.

La distancia a la que llega el motorista desde el final de la rampa es **40 metros**.

d) ¿Podrá saltar un obstáculo que tiene una altura de 10 metros que está a una distancia de 11 metros de la rampa?
Razona la respuesta

Se calcula la altura a la que está la moto cuando se encuentra a 11 metros de la rampa.

$$f(11) = -0,01 \cdot 11^2 + 0,2 \cdot 11 + 8 = 8,99$$

El motorista se encontrará a **8,99 metros** de altura cuando llegue a la altura del obstáculo, por lo que impactará contra el obstáculo. Esperemos que el accidente no sea muy grave y salga ileso de este accidente. Si hubiera sabido matemáticas, se habría ahorrado el castañazo.

Ejercicio 4

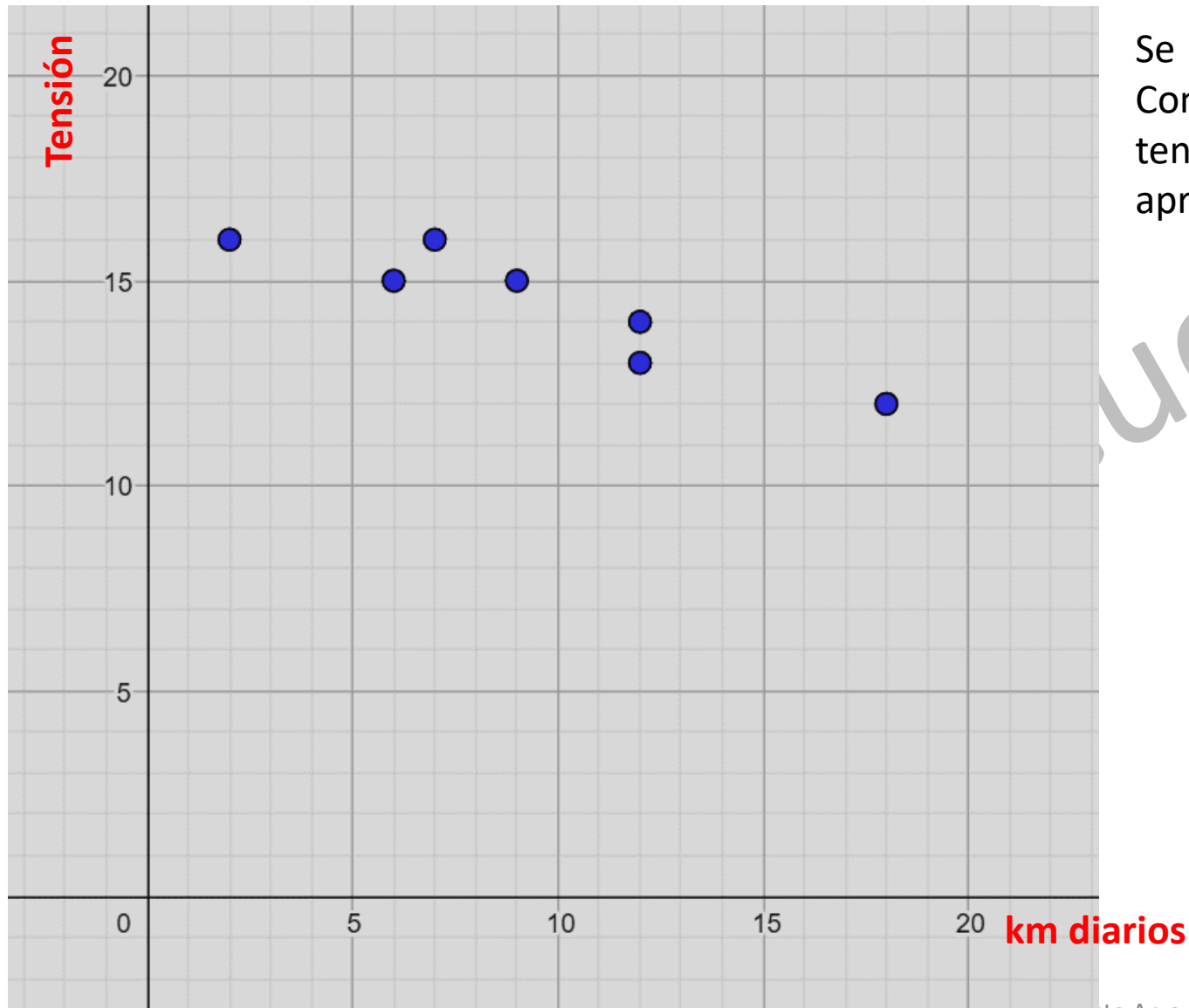
Se quiere realizar un estudio estadístico para estudiar si hay relación entre lo que camina una persona y la tensión arterial en las personas a partir de los 70 años. Para ello se pregunta a 7 personas mayores de 70 años los kilómetros que andan de media diariamente y se les mide la tensión tomando su valor superior. Los valores se reflejan en la siguiente tabla:

X (km diarios)	7	12	18	2	6	12	9
Y (tensión)	16	13	12	16	15	14	15

- a) Representa los datos en un diagrama de puntos. Deduce la relación entre las variables según la forma de la nube de puntos.
- b) Halla e interpreta el coeficiente de correlación.

Ejercicio 4

X (km diarios)	7	12	18	2	6	12	9
Y (tensión)	16	13	12	16	15	14	15



Se observa que las variables están correlacionadas. Conforme aumenta la distancia caminada, menor es la tensión arterial. La relación entre las variables es aproximadamente lineal.

Ejercicio 4

b) Halla e interpreta el coeficiente de correlación.

Aunque este cálculo se puede hacer directamente con la calculadora, debemos hacer el cálculo con las tablas.

Se completa la tabla para poder calcular las desviaciones típicas de **x** e **y**, y la covarianza.

Se aplica la fórmula para calcular las medias:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{66}{7} \approx \mathbf{9,43} \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{101}{7} \approx \mathbf{14,43}$$

Se aplica la fórmula para calcular las desviaciones típicas:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{782}{7} - \left(\frac{66}{7}\right)^2} \approx \sqrt{22,816} \approx \mathbf{4,78}$$
$$s_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1471}{7} - \left(\frac{101}{7}\right)^2} \approx \sqrt{1,959} \approx \mathbf{1,40}$$

Se aplica la fórmula para calcular la covarianza:

$$s_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{909}{7} - \left(\frac{66}{7}\right) \cdot \left(\frac{101}{7}\right) \approx \mathbf{-6,18}$$

x	y	x ²	y ²	x·y
7	16	49	256	112
12	13	144	169	156
18	12	324	144	216
2	16	4	256	32
6	15	36	225	90
12	14	144	196	168
9	15	81	225	135
66	101	782	1471	909

Se calcula el coeficiente de correlación lineal.

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{-6,18}{4,78 \cdot 1,40} \approx \mathbf{-0,92}$$

La correlación entre las variables es muy fuerte, ya que el valor se acerca a -1. Además, al ser negativo me indica que, a mayor distancia caminada, menor tensión arterial

Ejercicio 5

Un instituto oferta enseñanzas en la modalidad a distancia. De las personas matriculadas en ellas el 80% dispone de ordenador para el seguimiento de las clases online, el 30% dispone de una tableta y el 20% dispone de los dos dispositivos, tableta y ordenador.

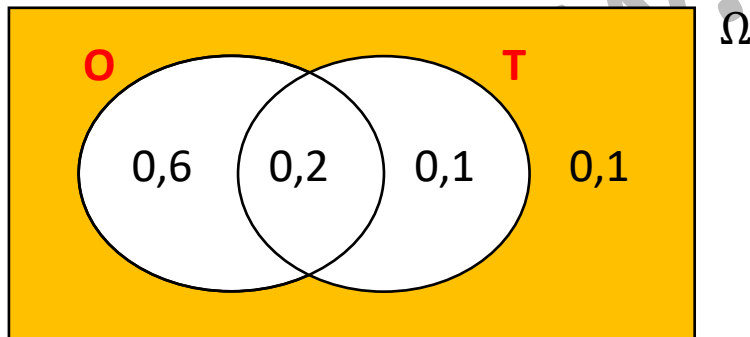
Si elegimos una persona al azar matriculada a distancia, halla:

- a) La probabilidad de que no tenga ni ordenador ni tableta.
- b) La probabilidad de que tenga alguno de los dos dispositivos, ordenador o tableta.
- c) La probabilidad de que tenga tableta, pero no tenga ordenador.
- d) Si se pregunta a una persona que tiene ordenador, ¿qué probabilidad hay que de que también tenga tableta?

Solución: Se definen los sucesos: O =el estudiante dispone de ordenador T =el estudiante dispone de una tableta

Del enunciado se deduce que: $P(O) = 0,8$ $P(T) = 0,3$ $P(O \cap T) = 0,2$

Nos puede ayudar a comprender el ejercicio representar los datos en un diagrama de Venn.



Ejercicio 5

a) La probabilidad de que no tenga ni ordenador ni tableta.

La probabilidad pedida es el suceso contrario de la unión de sucesos. Esto nos lo indica una de las leyes de Morgan.

$$P(\bar{O} \cap \bar{T}) = P(\overline{O \cup T}) = 1 - P(O \cup T)$$

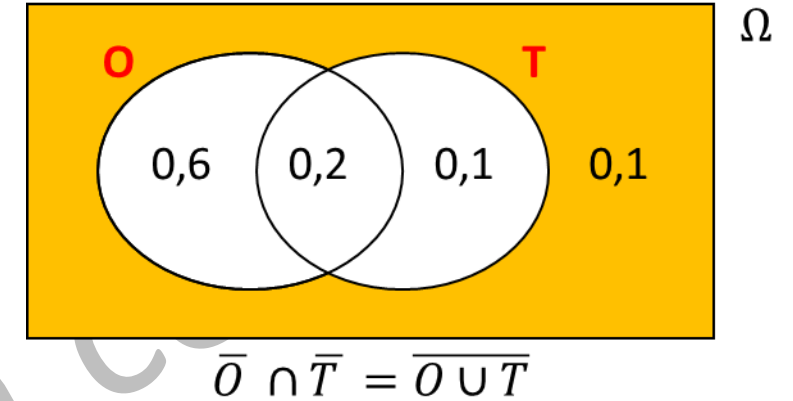
Es necesario calcular en primer lugar la probabilidad de que tenga ordenador o tableta.

$$P(O \cup T) = P(O) + P(T) - P(O \cap T) = 0,8 + 0,3 - 0,2 = 0,9$$

Se calcula la probabilidad pedida.

$$P(\bar{O} \cap \bar{T}) = P(\overline{O \cup T}) = 1 - P(O \cup T) = 1 - 0,9 = 0,1$$

La probabilidad de que no tenga ni ordenador ni tableta es **0,1 (el 10 %)**.



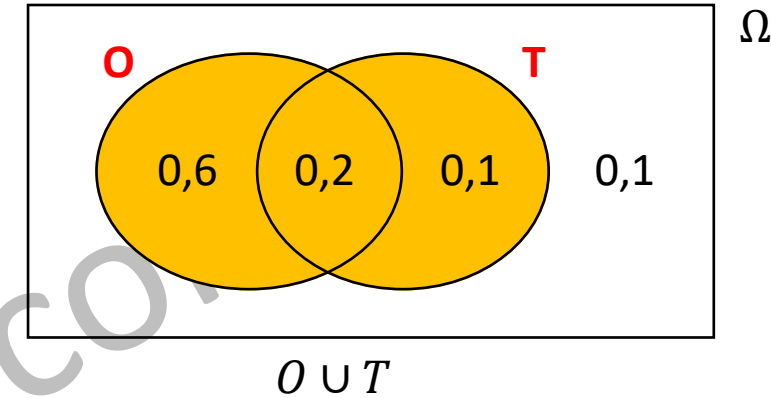
Ejercicio 5

b) La probabilidad de que tenga alguno de los dos dispositivos, ordenador o tableta.

Ya la habíamos calculado anteriormente.

$$P(O \cup T) = P(O) + P(T) - P(O \cap T) = 0,8 + 0,3 - 0,2 = 0,9$$

La probabilidad de que tenga alguno de los dos dispositivos, ordenador o tableta es **0,9 (el 90 %)**.

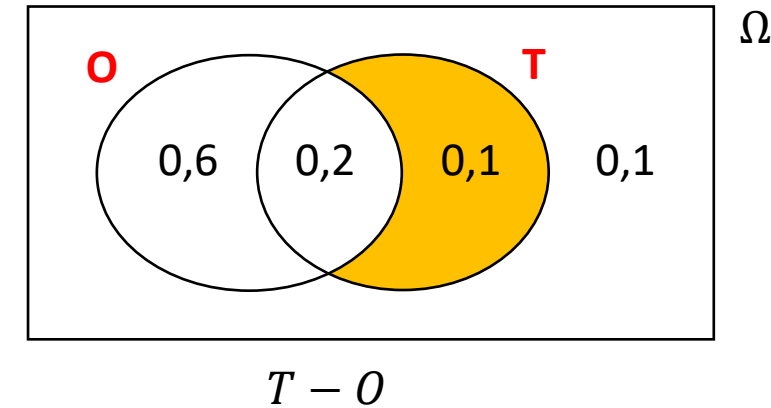


c) La probabilidad de que tenga tableta, pero no tenga ordenador.

Se aplica la ley de la diferencia.

$$P(T - O) = P(T) - P(T \cap O) = 0,3 - 0,2 = 0,1$$

La probabilidad de que tenga tableta, pero no tenga ordenador es **0,1 (el 10 %)**.



Ejercicio 5

d) Si se pregunta a una persona que tiene ordenador, ¿qué probabilidad hay de que también tenga tableta?

Se pide una probabilidad condicionada. $P(O) = 0,8$ $P(T) = 0,3$ $P(O \cap T) = 0,2$

$$P(T/O) = \frac{P(T \cap O)}{P(O)} = \frac{0,2}{0,8} = 0,25$$

Si se pregunta a una persona que tiene ordenador, la probabilidad hay de que también tenga tableta es **0,25 (el 25 %)**.