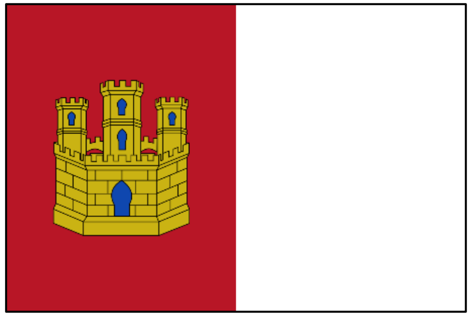
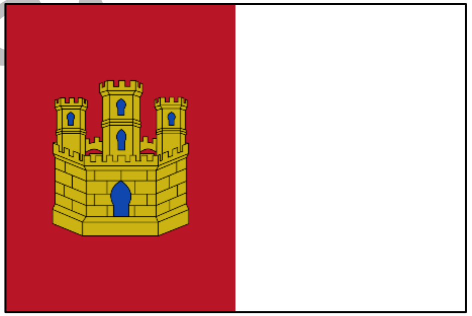
# PRUEBA DE ACCESO A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR



## CASTILLA LA MANCHA



# MATEMÁTICAS

## 2ª convocatoria 2019

# VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

No dejes de revisar mi canal, pues iré añadiendo nuevos.

Matrices y determinantes.
Teoría y ejercicios.

Ejemplo problema sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

PAU Comunidad Valenciana
Septiembre 2020

Ejemplo problema sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

PAU Comunidad Valenciana
Junio 2021

# Ejercicio 1

A un niño que nació a comienzos de 2019, su padre le ingresó en el banco 3000 € que van a convertirse en una cantidad que aumentará con el tiempo, t (en años desde el nacimiento), según la función $C(t)$ = 3000 · $1{,}2^t$.

a) ¿Cuánto dinero habrá cuando el niño cumpla 10 años?

b) ¿Y cuando cumpla 18?

c) ¿Cuántos años hay que dejar el dinero invertido para que se convierta en 6000 €?

Solución: a) El dinero que habrá a los diez años se calcula sustituyendo t por 10

$C(10) = 3000 \cdot 1'2^{10} = 18575'21$ €

**Solución**: A los 10 años habrá **18.575'21 €**.

b) El dinero que habrá a los dieciocho años se calcula sustituyendo t por 18 $C(18) = 3000 \cdot 1'2^{18} = 79870$ €

**Solución**: A los 10 años habrá **79.870 €**.

c) Se sustituye el capital por 6.000 y se despeja el tiempo. $6000 = 3000 \cdot 1'2^t \longrightarrow 2 = 1'2^t$

Debemos tomar logaritmos para despejar. $Ln(2) = Ln(1'2^t) \longrightarrow Ln(2) = t \cdot Ln(1'2)$

$$t = \frac{Ln(2)}{Ln(1'2)} \approx 3'8 \text{ años}$$

**Solución**: Deben transcurrir aproximadamente **3'8 años** para que haya 6000 € en el banco.

# Ejercicio 2

Una empresa de juguetes fabrica bicicletas, triciclos y coches en los que utiliza el mismo modelo de ruedas. Sabemos que en total se van a fabricar 280 juguetes y se necesitan 945 ruedas. Si se van a producir 10 bicicletas menos que triciclos:

a) ¿Cuántos coches, bicicletas y triciclos se fabrican?

b) Si las bicicletas se venden a 65 €, los triciclos a 75 € y los coches a 90 € ¿Cuál es el valor total de los juguetes fabricados?

Solución:

Se definen las incógnitas del problema.

x= nº de bicicletas
y= nº de triciclos.
z= nº de coches

Traducimos del español al lenguaje algebraico.

*"en total se van a fabricar 280 juguetes "* $x + y + z = 280$

*"se necesitan 945 ruedas"* $2x + 3y + 4z = 945$

*"Si se van a producir 10 bicicletas menos que triciclos"* $x = y - 10 \longrightarrow x - y = -10$

# Ejercicio 2

Determinantes

Quedando el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y + z = 280 \\ 2x + 3y + 4z = 945 \\ x - y = -10 \end{cases}$

Resolveré el sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 280 & 1 & 1 \\ 945 & 3 & 4 \\ -10 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{165}{3} = \mathbf{55}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 280 & 1 \\ 2 & 945 & 4 \\ 1 & -10 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{195}{3} = \mathbf{65}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 280 \\ 2 & 3 & 945 \\ 1 & -1 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{480}{3} = \mathbf{160}$$

**Solución**: Se fabrican **55 bicicletas, 65 triciclos y 160 coches**.

# Ejercicio 2

b) Si las bicicletas se venden a 65 €, los triciclos a 75 € y los coches a 90 € ¿Cuál es el valor total de los juguetes fabricados?

Como se fabrican **55 bicicletas, 65 triciclos y 160 coches**.

El valor de los juguetes se obtiene multiplicando el precio por la cantidad.

$$P = 55 \cdot 65 + 65 \cdot 75 + 160 \cdot 90 = 22.850\ €$$

**Solución**: El valor total de los juguetes fabricados es **22.850 €**.

# Ejercicio 3

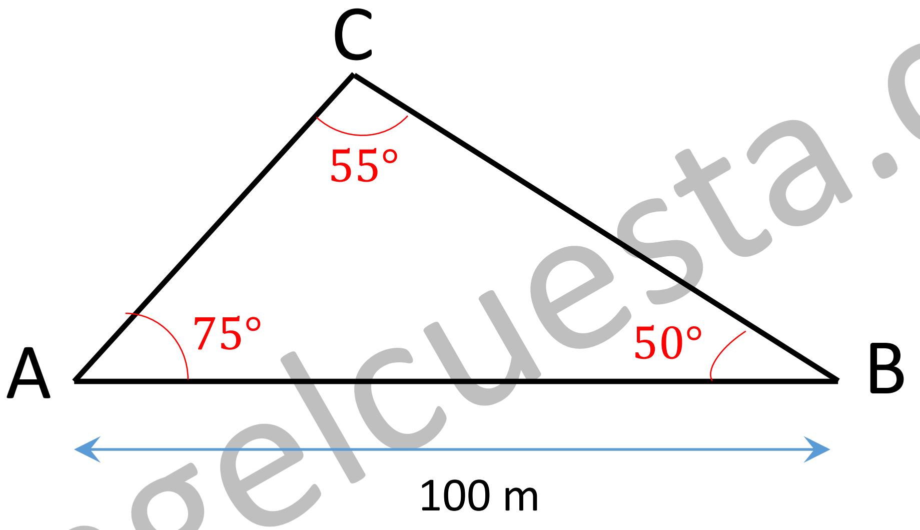
Se quiere unir tres casas, A, B y C, mediante caminos rectos que unan A con B, B con C, y C con A. La distancia entre las casas A y B es de 100 metros, el ángulo correspondiente a B es de 50°, y el ángulo en A es de 75°.

a) ¿Cuál es la distancia entre B y C?

b) ¿Cuál es la distancia entre A y C?

Solución:

Se hace un esquema de la situación.




Se calcula el ángulo restante

$\widehat{C} = 180 - 75 - 50 = 55$

Para calcular las longitudes pedidas aplicamos el teorema de los senos. $\dfrac{\overline{AB}}{sen(\widehat{C})} = \dfrac{\overline{AC}}{sen(\widehat{B})} = \dfrac{\overline{BC}}{sen(\widehat{A})}$

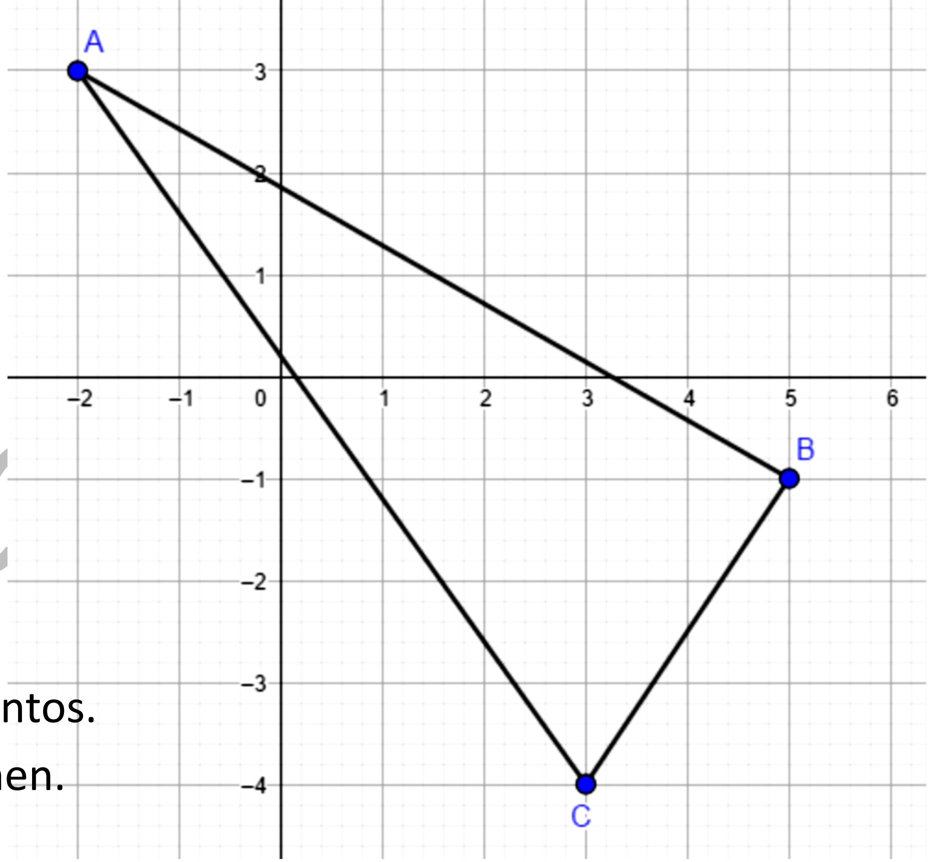
$$\frac{100}{sen(55°)} = \frac{\overline{AC}}{sen(50°)} = \frac{\overline{BC}}{sen(75°)} \longrightarrow \frac{100}{sen(55°)} = \frac{\overline{AC}}{sen(50°)} \longrightarrow \overline{AC} = \frac{100 \cdot sen(50°)}{sen(55°)} = 93'52\ m$$

$$\frac{100}{sen(55°)} = \frac{\overline{BC}}{sen(75°)} \longrightarrow \overline{BC} = \frac{100 \cdot sen(75°)}{sen(55°)} = 117'92\ m$$



**Solución**: El valor de los lados es: $\boldsymbol{\overline{AC} = 93'52\ m}$ y $\boldsymbol{\overline{BC} = 117'92\ m}$

# Ejercicio 4




Dado el triángulo cuyos vértices son los puntos A( −2,3), B(5,−1) y C(3,−4):

a) Representa el triángulo.

b) Calcula la longitud de cada uno de los lados.

c) Calcula el área del triángulo.

Solución:

Se sitúan los puntos A, B y C y se unen.

La longitud de los lados se calcula con la fórmula de la distancia entre dos puntos.
La distancia entre dos puntos se calcula como el módulo del vector que definen.

Calculo el vector: $\overrightarrow{AB} = B - A = (5, -1) - (-2,3) = (7, -4)$

Y su módulo: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{7^2 + (-4)^2} = \sqrt{65}$

Calculo el vector: $\overrightarrow{AC} = C - A = (3, -4) - (-2,3) = (5, -7)$

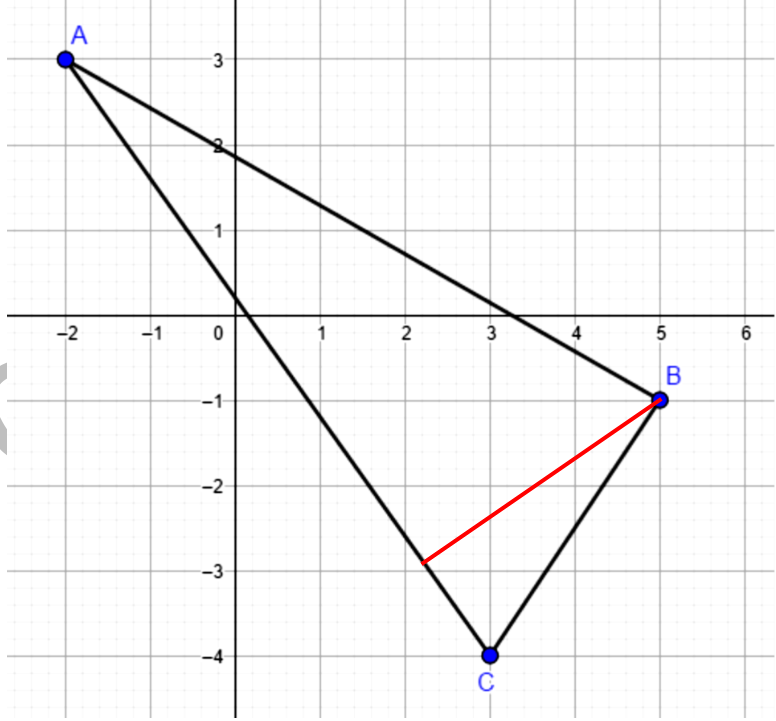
Y su módulo: $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = \sqrt{74}$

Calculo el vector: $\overrightarrow{BC} = C - B = (3, -4) - (5, -1) = (-2, -3)$

Y su módulo: $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

**Solución**: La longitud de los lados es: $\overline{\boldsymbol{AB}} = \sqrt{\mathbf{65}}$, $\overline{\boldsymbol{AC}} = \sqrt{\mathbf{74}}$ y $\overline{\boldsymbol{BC}} = \sqrt{\mathbf{13}}$

# Ejercicio 4




Dado el triángulo cuyos vértices son los puntos A( −2,3), B(5,−1) y C(3,−4):

c) Calcula el área del triángulo.

Tomamos como base del triángulo el lado AC.

La altura del triángulo es la distancia de B a la recta definida por A y C.

Calculo la ecuación de la recta que pasa por A y C.

Calculo la pendiente: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-4-3}{3-(-2)} = \dfrac{-7}{5}$

Calculo la ecuación de la recta utilizando la ecuación punto-pendiente.

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \longrightarrow y - (-4) = -\frac{7}{5} \cdot (x-3) \longrightarrow 5y + 20 = -7x + 21 \longrightarrow 7x + 5y - 1 = 0$$

Calculo la altura del triángulo. $h = \dfrac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|7 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{7^2 + 5^2}} = \dfrac{29}{\sqrt{74}}$

Calculo el área del triángulo.

$$A = \frac{\overline{AC} \cdot h}{2} = \frac{\cancel{\sqrt{74}} \cdot \dfrac{29}{\cancel{\sqrt{74}}}}{2} = \boxed{\mathbf{14'5\ unidades\ de\ área}}$$

# Ejercicio 5

En un campeonato de esquí de fondo se conceden tres premios inversamente proporcionales a los tiempos empleados en la finalización de la prueba. Los tiempos de los tres primeros esquiadores han sido 3, 5 y 6 horas. Calcula cuánto dinero recibe cada uno si hay 42000 euros para repartir.

Solución: Este ejercicio de reparto inverso se puede hacer de varias formas. Explicaré una de las más habituales.

Obtenemos los inversos de los tiempos. $\frac{1}{3};\frac{1}{5};\frac{1}{6}$

Convertimos las fracciones a denominador común (que es el mcm). En este caso es 30. $\frac{10}{30};\frac{6}{30};\frac{5}{30}$

Realizamos un reparto directamente proporcional a los numeradores: 10, 6 y 5.

$$\frac{x}{10}=\frac{y}{6}=\frac{z}{5}=\frac{x+y+z}{10+6+5}=\frac{42000}{21}=2000$$

Calculo x, y y z.

$$\frac{x}{10}=2000 \longrightarrow x=20000$$

$$\frac{y}{6}=2000 \longrightarrow y=12000$$

$$\frac{z}{5}=2000 \longrightarrow z=10000$$

**Solución**: Al ganador le tocan **20.000 €**, al segundo **12.000 €** y al último **10.000 €**.

# Ejercicio 6

Las calificaciones de un grupo de 34 alumnos en las asignaturas de Lengua y Matemáticas vienen recogida en la siguiente tabla:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nota de Lengua $(X_i)$ | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 9 | 10 |
| Nota de Matemáticas $(Y_i)$ | 4 | 4 | 5 | 5 | 7 | 8 | 8 | 10 |
| Número de estudiantes | 4 | 2 | 6 | 5 | 8 | 3 | 4 | 2 |

a) Halla las medias y las varianzas de cada una de las dos variables.

b) Calcula la covarianza de las variables.

# Ejercicio 6

a) Halla las medias y las varianzas de cada una de las dos variables.

| $x_i$ | $y_i$ | $f_i$ | $x_i \cdot f_i$ | $y_i \cdot f_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 16 | 16 |
| 5 | 4 | 2 | 10 | 8 |
| 5 | 5 | 6 | 30 | 30 |
| 6 | 5 | 5 | 30 | 25 |
| 6 | 7 | 8 | 48 | 56 |
| 7 | 8 | 3 | 21 | 24 |
| 9 | 8 | 4 | 36 | 32 |
| 10 | 10 | 2 | 20 | 20 |
| | | **34** | **211** | **211** |

Se aplica la fórmula para calcular las medias:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N} \longrightarrow \bar{x} = \frac{211}{34} = \boxed{6'21}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i \cdot f_i}{N} \longrightarrow \bar{y} = \frac{211}{34} = \boxed{6'21}$$

Teoría y ejercicios de estadística.

# Ejercicio 6

Teoría y ejercicios de estadística.

a) Halla las medias y las varianzas de cada una de las dos variables.

| $x_i$ | $y_i$ | $f_i$ | $x_i \cdot f_i$ | $y_i \cdot f_i$ | $x_i^2 \cdot f_i$ | $y_i^2 \cdot f_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 16 | 16 | 64 | 64 |
| 5 | 4 | 2 | 10 | 8 | 50 | 32 |
| 5 | 5 | 6 | 30 | 30 | 150 | 150 |
| 6 | 5 | 5 | 30 | 25 | 180 | 125 |
| 6 | 7 | 8 | 48 | 56 | 288 | 392 |
| 7 | 8 | 3 | 21 | 24 | 147 | 192 |
| 9 | 8 | 4 | 36 | 32 | 324 | 256 |
| 10 | 10 | 2 | 20 | 20 | 200 | 200 |
| | | **34** | **211** | **211** | **1403** | **1411** |

Se aplica la fórmula para calcular las varianzas:

$$s_x^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{\mathrm{N}} - (\bar{x})^2 = \frac{1403}{34} - (6'21)^2 = \boxed{2'70}$$

$$s_y^2 = \frac{\sum y_i^2 \cdot f_i}{\mathrm{N}} - (\bar{y})^2 = \frac{1411}{34} - (6'21)^2 = \boxed{2'94}$$

# Ejercicio 6

b) Calcula la covarianza de las variables.

| $x_i$ | $y_i$ | $f_i$ | $x_i \cdot y_i \cdot f_i$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 64 |
| 5 | 4 | 2 | 40 |
| 5 | 5 | 6 | 150 |
| 6 | 5 | 5 | 150 |
| 6 | 7 | 8 | 336 |
| 7 | 8 | 3 | 168 |
| 9 | 8 | 4 | 288 |
| 10 | 10 | 2 | 200 |
| | | **34** | **1396** |

Se aplica la fórmula para calcular la covarianza:

$$s_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i \cdot f_i}{\mathrm{N}} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1396}{34} - (6'21) \cdot (6'21) = \boxed{2'49}$$

Un valor positivo de la covarianza nos indica que a mayor valor de la variable x (nota de lengua), mayor valor de la variable y (nota de matemáticas).

Para cuantificar esta relación, deberíamos calcular el coeficiente de correlación entre las variables.